

Ein Verschwindungssatz
für lokal-freie Garben
über $\mathcal{D.F.N}$ -Räumen

Dietmar Noßke

Diss
München
1984

Ein Verschwindungssatz für lokal-freie Garben über *DFN*-Räumen

Dissertation
zur Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der Naturwissenschaften
der Fakultät für Mathematik
der Ludwig-Maximilians-Universität
München

vorgelegt von
Dietmar Noßke
aus Jena

eingereicht am 10. August 1983

1. Berichterstatter: Prof. Dr. M. Schottenloher

2. Berichterstatter: Prof. Dr. H. W. Schuster

Tag der mündlichen Prüfung: 4. Juli 1984

I N H A L T S V E R Z E I C H N I S

EINLEITUNG	2
KAPITEL 1: Einige Bezeichnungen und Definitionen	9
KAPITEL 2: Die Lösung des $\bar{\partial}$ -Problems auf pseudokonvexen Gebieten eines DFN -Raumes	28
KAPITEL 3: Das Cartansche Heftungslemma für Silva-Räume mit Basis	57
KAPITEL 4: Ein hinreichendes Kriterium für das Verschwinden der ersten Kohomologiegruppe einer $\mathcal{O}$ -Modul-Garbe über einem pseudokonvexen Gebiet eines Silva-Raumes mit Basis	71
KAPITEL 5: Holomorphe Fortsetzbarkeit holomorpher Funktionen von endlich-dimensionalen analytischen Mengen auf ein konvexes Gebiet eines Silva-Raumes mit Basis	81
KAPITEL 6: Das Verschwinden der ersten Kohomologiegruppe einer lokal- N -freien $\mathcal{O}$ -Modul-Garbe über einem pseudokonvexen Gebiet eines DFN -Raumes mit Basis	94
LITERATUR	107

E I N L E I T U N G

Eine der zentralen Aussagen der klassischen komplexen Analysis ist das Cartansche Theorem B. Es besagt, daß für eine kohärente analytische Garbe $\mathcal{F}$ über einem Steinschen Raum X die q -te Kohomologiegruppe $H^q(X, \mathcal{F})$ verschwindet. Seine große Bedeutung erlangt dieses Theorem B durch seine vielfältigen Anwendungsmöglichkeiten: So wird es unter anderem benötigt bei der Lösung der Cousin-Probleme, für den Beweis der holomorphen Fortsetzbarkeit holomorpher Funktionen von einer analytischen Menge auf den ganzen Raum sowie zur Charakterisierung Steinscher Mannigfaltigkeiten. Damit rechtfertigt es auch die Einführung der Kohomologietheorie in die komplexe Analysis.

In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, daß die erste Kohomologiegruppe einiger wichtiger $\mathcal{O}$ -Modul-Garben über pseudokonvexen Gebieten eines DFN -Raumes mit Basis verschwindet, und daß man damit viele wichtige Anwendungen des Theorems B in der klassischen Theorie auch auf den unendlich-dimensionalen Fall übertragen kann.

Daß dies nicht für beliebige lokal-konvexe Vektorräume geht, zeigt ein Beispiel von Dineen [11]: Er bewies, daß in lokal-konvexen Vektorräumen, die keine stetige Norm besitzen, die erste Kohomologiegruppe von $\mathcal{O}$ nicht verschwindet.

Das Verschwinden der ersten Kohomologiegruppe von O ist jedoch interessant, um damit die Cousin-Probleme zu lösen.

In der endlich-dimensionalen Theorie zeigt man $H^q(X, O) = 0$ für einen Steinschen Raum X durch Anwendung des Satzes von de Rham auf die de Rham-Kohomologie unter Verwendung der Lösung des $\bar{\partial}$ -Problems.

Will man diesen Beweis auf den unendlich-dimensionalen Fall übertragen, so muß man für die Anwendung des Satzes von de Rham einen parakompakten Raum zu Grunde legen (pseudokonvexe Gebiete eines $\mathcal{DFN}$ -Raumes sind parakompakt) und die Lösbarkeit des $\bar{\partial}$ -Problems zeigen, d.h. man muß zu jeder $\bar{\partial}$ -geschlossenen C^∞ -($0, q+1$)-Differentialform F eine C^∞ -($0, q$)-Differentialform f finden mit $\bar{\partial}f = F$.

Ein erster Ansatz zur Lösung des $\bar{\partial}$ -Problems im unendlich-dimensionalen Fall stammt von Henrich [18]: Er zeigte mit komplizierten Integralformeln, daß es zu jeder $\bar{\partial}$ -geschlossenen C^∞ -($0, 1$)-Differentialform F auf einem Banach-Raum B eine C^∞ -Funktion f auf einem dicht in B liegenden Hilbert-Raum H gibt mit $\bar{\partial}f = F|_H$, wenn F polynomiales Wachstum hat und die Ableitungen von F auf beschränkten Mengen beschränkt sind.

Raboin [36] verbesserte Henrichs Ergebnisse, indem er mit ähnlichen Methoden wie Hörmander [21] im endlich-

dimensionalen Fall zeigte: Ist F eine auf beschränkten Mengen beschränkte C^∞ -(0,1)-Differentialform auf einem pseudokonvexen Gebiet Ω eines Hilbert-Raumes H , so gibt es eine Funktion $f \in C^1(\Omega, \tilde{H})$ mit $\bar{\partial}f = F|_{\tilde{H}}$, wobei $\tilde{H}$ ein dicht in H liegender Hilbert-Raum ist.

Eine Lösung des $\bar{\partial}$ -Problems auf Hilbert-Räumen scheint jedoch nicht möglich zu sein, was auch das Beispiel von Coeuré [8] andeutet: Coeuré gab eine C^1 -(0,1)-Differentialform F (keine C^∞ -Form) auf einem Hilbert-Raum an, zu der es keine C^1 -Funktion f gibt mit $\bar{\partial}f = F$.

Die Teillösung Raboins auf Hilbert-Räumen läßt sich jedoch anwenden bei der Lösung des $\bar{\partial}$ -Problems in DFN -Räumen: Zuerst zeigte Raboin [36], daß es zu einer $\bar{\partial}$ -geschlossenen C^∞ -(0,1)-Differentialform F auf einem pseudokonvexen Gebiet eines DFN -Raumes mit Basis eine C^1 -Funktion f auf Ω gibt mit $\bar{\partial}f = F$, wenn F eine gewisse lokale technische Bedingung erfüllt.

Während Raboin in seinem Beweis die Darstellung von DFN -Räumen als projektiver Limes von Hilbert-Räumen verwendete, konnte ich sein Ergebnis mit Hilfe der Darstellung von DFN -Räumen als induktiver Limes abzählbar vieler Hilbert-Räume verbessern: In Kapitel 2 dieser Arbeit wird gezeigt (Theorem 2.1), daß es zu jeder $\bar{\partial}$ -geschlossenen C^∞ -(0,1)-Differentialform F auf einem pseudokonvexen Gebiet Ω eines DFN -Raumes (auch ohne Basis) eine C^1 -Funktion f auf Ω gibt

mit $\bar{\partial}f = F$. Dieses Ergebnis erhielten unabhängig von mir mit denselben Methoden auch Colombeau/Perrot [9].

Für den Beweis von Theorem 2.1 benutze ich Raboins Ergebnis auf Hilbert-Räumen, um zu einer $\bar{\partial}$ -geschlossenen C^∞ -(0,1)-Differentialform F auf $\Omega \subset E := \varprojlim H_n$ und zu einem beliebigem Kompaktum $K \subset \Omega$ eine Funktion $f \in C^n(K)$ in einem Hilbert-Raum $H_m \subset E$ zu finden mit $\bar{\partial}f = F|_K$ (Satz 2.2). Diese Lösungen werden dann in geeigneter Weise mittels einer kompakten Ausschöpfung von Ω und eines Satzes vom Oka-Weil-Typ (Hilfssatz 2.9) zusammengeklebt. Dabei beweise ich auch Raboins Hilbert-Raum-Ergebnis ausführlich (Hilfssätze 2.4-2.8). Als Anwendung der Lösung des $\bar{\partial}$ -Problems zeige ich das Verschwinden der ersten Kohomologiegruppe einer vom Rang N freien $\mathcal{O}$ -Modul-Garbe (Satz 2.10) - also insbesondere von $\mathcal{O}$ selbst - woraus wiederum die Lösung des Cousin-I-Problems und eine hinreichende Bedingung für die Lösung des Cousin-II-Problems folgen (Korollar 2.11 und 2.12).

Nun ist es naheliegend zu untersuchen, ob sich obiges Ergebnis für vom Rang N freie $\mathcal{O}$ -Modul-Garben auch auf vom Rang N lokal-freie $\mathcal{O}$ -Modul-Garben ausdehnen läßt. Dieser Übergang von freien zu lokal-freien Garben geschieht in der endlich-dimensionalen Theorie mittels des Cartanschen Heftungslemmas. Dieses besagt, daß für bestimmte kompakte Quader K' und K'' und eine holomorphe Abbildung $f: K' \cap K'' \rightarrow GL(N; \mathbb{C})$ in die Menge der invertierbaren

$N \times N$ -Matrizen holomorphe Abbildungen $f': K' \rightarrow GL(N; \mathbb{C})$ und $f'': K'' \rightarrow GL(N; \mathbb{C})$ gibt mit $f = f' \cdot f''|_{K' \cap K''}$.

In Kapitel 3 beweise ich eine schwächere, aber - wie sich später herausstellen wird - für den Übergang zu lokal-freien Garben ausreichende Version dieses Lemmas für pseudokonvexe Gebiete eines Silva-Raumes E mit Basis ($\mathcal{DFN}$ -Räume sind insbesondere Silva-Räume). Der Beweis hält sich an den Beweis von Gunning/Rossi [17] im endlich-dimensionalen Fall. Dabei besteht eine Haupt-Schwierigkeit darin, daß E nicht lokal-kompakt ist und kompakte Mengen deshalb keine kompakten Umgebungen besitzen. Diese Schwierigkeit umgehe ich dadurch, daß ich die gesuchte Produkt-Darstellung in einem der E definierenden Banach-Räume konstruiere.

Bevor ich nun Kapitel 3 auf vom Rang N lokal-freie $\mathcal{O}$ -Modul-Garben anwende, beweise ich ein hinreichendes Kriterium für das Verschwinden der ersten Kohomologiegruppe einer $\mathcal{O}$ -Modul-Garbe über einem pseudokonvexen Gebiet Ω eines Silva-Raumes E mit Basis (Theorem 4.1). Das hat den Vorteil, daß ich mich auch bei anderen als den lokal-freien Garben darauf beziehen kann, und die Beweise dadurch kürzer und besser strukturiert werden.

Beim Beweis von Theorem 4.1 halte ich mich an den Beweis des Theorems B bei Andreian Cazacu ([1] VI § 5, Theorem 2). Dabei besteht die größte Schwierigkeit darin,

daß Ω keine kompakte Ausschöpfung $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ haben kann mit $K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}$, da E nicht lokal-kompakt ist. Dieses Hindernis umgehe ich wiederum mit einem Umweg über die E definierenden Banach-Räume, indem ich eine kompakte Ausschöpfung $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Ω und in jeweils einem dieser Banach-Räume offene Mengen U_n wähle mit $K_n \subset U_n \subset K_{n+1}$.

Mit Hilfe von Kapitel 3 und Kapitel 4 kann dann tatsächlich in Kapitel 6 bewiesen werden, daß die erste Kohomologiegruppe einer vom Rang N lokal-freien $\mathcal{O}$ -Modulgarbe über einem pseudokonvexen Gebiet Ω eines $\mathcal{DFN}$ -Raumes mit Basis verschwindet (Theorem 6.1). Dabei muß unter anderem gezeigt werden, daß die Produktdarstellung auf den Banach-Räumen bei unserer Form des Cartanschen Heftungslemmas ausreicht.

Als wichtige Anwendung von Theorem 6.1 zeige ich in Satz 6.4 - wie Ramis [37] für Banach-Räume - daß die Idealgarbe I_A einer analytischen Hyperfläche $A \subset \Omega$ lokal-frei ist vom Rang 1. Als Korollar(6.5) folgt daraus, daß sich jede holomorphe Funktion auf A holomorph nach Ω fortsetzen läßt.

Dieses Ergebnis legt es nahe, nach weiteren analytischen Mengen zu suchen, welche diese Fortsetzungseigenschaft haben, und damit ein Ergebnis von Boland [4] zu ergänzen, der mit Hilfe der Theorie der fast-offenen Abbildungen diese Fortsetzungseigenschaft für abgeschlossene lineare Teilräume eines $\mathcal{DFN}$ -Raumes zeigte:

In Kapitel 5 zeige ich mit Hilfe von Theorem 4.1, daß die erste Kohomologiegruppe der Idealgarbe I_A einer endlich-dimensionalen analytischen Teilmenge A eines konvexen Gebietes Ω eines Silva-Raumes E mit Basis verschwindet (Theorem 5.1), und sich damit jede holomorphe Funktion auf A holomorph nach Ω fortsetzen läßt (Korollar 5.4). Ist Ω nur pseudokonvex, so gilt dieses Ergebnis noch, wenn A lokal in endlich-dimensionalen linearen Teilräumen von E enthalten ist (Satz 5.2). Während für den letzten Fall der Beweis sich direkt auf die endlich-dimensionale Theorie bezieht und relativ einfach ist, ist es für den allgemeinen Fall einer endlich-dimensionalen analytischen Menge technisch kompliziert, mit Hilfe eines Satzes von Mazet [29] eine kompakte Ausschöpfung von Ω zu konstruieren, die den Bedingungen von Theorem 4.1 genügt.

Am Anfang dieser Arbeit stelle ich in Kapitel 1 einige Bezeichnungen und im weiteren Verlauf dieser Arbeit benötigte Definitionen und grundlegende Sätze aus der Theorie der topologischen Vektorräume und der (reellen und komplexen) Analysis auf topologischen Vektorräumen zusammen.

Ich möchte diese Einleitung nicht beenden, ohne meinem Lehrer, Herrn Prof. Dr. M. Schottenloher, für die Hinführung an diese Arbeit und ihre Betreuung zu danken.

K A P I T E L 1

Einige Bezeichnungen und Definitionen

Es seien $\mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$ die Menge der natürlichen Zahlen, $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen, $\mathbb{R}_+$ die Menge der positiven reellen Zahlen und $\mathbb{C}$ die Menge der komplexen Zahlen.

Ist X ein topologischer Raum und $M \subset X$ eine Teilmenge von X , so ist $\overset{\circ}{M} := \bigcup_{\substack{N \subset M \\ N \text{ offen}}} N$ der *offene Kern* von M ,

$\bar{M} := \bigcap_{\substack{M \subset N \\ N \text{ abg.}}} N$ die *abgeschlossene Hülle* von M und $\partial M := \bar{M} \setminus \overset{\circ}{M}$ der *Rand* von M .

Ist Y ein normierter Raum und $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung, so ist $\|f\|_M := \sup\{\|f(x)\|; x \in M\}$ die *Supremumsnorm* von f auf M , falls das Supremum existiert (das ist z.B. immer der Fall, wenn $M \subset X$ kompakt und f stetig ist).

Ist X ein metrischer Raum mit Metrik d , so ist $B_r^X(x) := \{y \in X; d(x, y) < r\}$ die *offene Kugel* um $x \in X$ mit Radius $r \in \mathbb{R}_+$. Ist es eindeutig, welches X gemeint ist, schreiben wir auch $B_r(x)$, und für $x = 0$ auch einfach B_r .

Sind A und B topologische Vektorräume, so bezeichne $\mathcal{L}(A, B)$ die Menge der stetigen linearen Abbildungen $A \rightarrow B$ und $\mathcal{L}^n(A, B)$ die Menge der stetigen n -linearen Abbildungen $A^n \rightarrow B$, versehen mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf beschränkten Mengen.

Nach diesen Bezeichnungen bringen wir eine kurze Einführung in die Differentialrechnung auf topologischen Vektorräumen, vgl. Averbukh/Smolyanov [2]:

1.1 Definition:

Es seien E und F reelle topologische Vektorräume, $U \subset E$ offen und $f: U \rightarrow F$ eine Abbildung. f heißt bei $x \in U$ in Richtung des Untervektorraumes $H \subset E$ (Fréchet-) differenzierbar, wenn es eine stetige lineare Abbildung $u: H \rightarrow F$ und eine Abbildung $r: H \rightarrow F$ gibt, so daß für $h \in H$ gilt

$$f(x+h) = f(x) + u(h) + r(h).$$

Dabei soll $\frac{r(th)}{t}$ für $t \rightarrow 0$ gleichmäßig bezüglich $h \in B$ - wobei $B \subset H$ eine beliebige beschränkte Teilmenge sei - gegen 0 konvergieren. Die lineare Abbildung $u =: f'(x)$ heißt die Ableitung von f in x in Richtung H . Ist f differenzierbar in jedem Punkt $x \in U$, so heißt f differenzierbar.

Sind E und F komplexe topologische Vektorräume, so heißt f differenzierbar, wenn f bezüglich der zugrundeliegenden reellen Vektorräumen $E^{\mathbb{R}}$ und $F^{\mathbb{R}}$ differenzierbar ist.

Ist f n -mal differenzierbar mit der n -ten Ableitung $f^{(n)}$, und ist die Abbildung $U \rightarrow L^n(H, F) \cong L(H, L^{n-1}(F))$, $x \mapsto f^{(n)}(x)$ differenzierbar, so heißt f $(n+1)$ -mal differenzierbar in Richtung H .

Ist f n -mal stetig differenzierbar, d.h. n -mal differenzierbar mit stetiger n -ter Ableitung $U \rightarrow L^n(H, F)$, so ist

$f \in C_H^n(U; F)$. Ist $f \in C_H^n(U; F)$ für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$, so ist $f \in C_H^\infty(U; F)$. Die Menge $C_H^n(U; F)$ mit $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ sei versehen mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf kompakten Mengen. Ist $F = \mathbb{R}$ oder $F = \mathbb{C}$ und $H = E$, so schreibt man auch $f \in C^n(U)$. Schließlich bezeichnet C bzw. C^n mit $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ die Garbe der Keime stetiger bzw. n -mal stetig differenzierbarer Funktionen.

Von den Differentialformen interessieren uns in dieser Arbeit nur die $(0, q)$ -Formen:

1.2 Definition:

Es sei E ein lokal-konvexer $\mathbb{C}$ -Vektorraum, $U \subset E$ offen und $\Lambda_{(0, q)}(E)$ die Menge der alternierenden q -Antilinearformen $E^q \rightarrow \mathbb{C}$ mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf beschränkten Mengen. Eine C^∞ - $(0, q)$ -Differentialform auf U ist dann eine C^∞ -Abbildung $U \rightarrow \Lambda_{(0, q)}(E)$, und $\mathcal{E}_{(0, q)}(U)$ bezeichnet den Raum aller C^∞ - $(0, q)$ -Differentialformen auf U , versehen mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf kompakten Teilmengen von U . Für $q = 0$ definiert man $\Lambda_{(0, 0)}(E) := \mathbb{C}$, und somit gilt $\mathcal{E}_{(0, 0)}(U) = C^\infty(U)$.

Von der (reell) äußeren Ableitung von Differentialformen interessiert uns hier nur der (komplex) antilineare Anteil:

1.3 Definition:

Ist E ein lokal-konvexer $\mathbb{C}$ -Vektorraum und $U \subset E$ offen, so gibt es für $q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ jeweils eine Abbildung

$$\bar{\partial}: \mathcal{E}_{(0,q)}(U) \rightarrow \mathcal{E}_{(0,q+1)}(U), \text{ definiert durch } \bar{\partial}\omega(x)(y_1, \dots, y_{q+1}) := \\ = \frac{1}{q+1} \sum_{k=1}^{q+1} (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{2} (\omega'(x)(y_k) + i\omega'(x)(iy_k))(y_1, \dots, \hat{y}_k, \dots, y_{q+1}),$$

wobei $\hat{y}_k$ weggelassen wird. Gilt $\bar{\partial}\omega \equiv 0$, so heißt ω $\bar{\partial}$ -geschlossen.

Nach den differenzierbaren Abbildungen kommen wir zu den holomorphen Abbildungen:

1.4 Definition:

Es seien E und F lokal-konvexe $\mathbb{C}$ -Vektorräume, $U \subset E$ offen und $f: U \rightarrow F$ eine Abbildung.

f heißt *Gâteaux-analytisch*, wenn für $a \in U$, $b \in E$ und $\phi \in F'$ die Abbildung $\lambda \mapsto \phi \circ f(a + \lambda b)$ in einer Nullumgebung (in $\mathbb{C}$) holomorph ist. Ist f Gâteaux-analytisch und stetig, so heißt f *analytisch* bzw. *holomorph*. Die Menge der holomorphen Abbildungen $U \rightarrow F$ bezeichnet man mit $O(U; F)$ bzw. im Fall $F = \mathbb{C}$ auch mit $O(U)$. Entsprechend bezeichnet man die Garbe der Keime holomorpher Funktionen (d.h. der holomorphen Abbildungen nach $\mathbb{C}$) mit O und mit O^* die Garbe der Keime invertierbarer holomorpher Funktionen. Ist f holomorph und bijektiv, so ist f ein *Homöomorphismus*, wenn f^{-1} ebenfalls holomorph ist.

Ist $\mathcal{M}_x$ für $x \in U$ der Quotientenkörper zu (dem Integritätsring) $\mathcal{O}_x$, so definiert man dadurch $\mathcal{M}$, die Garbe der Keime meromorpher Funktionen. Weiter sei $\mathcal{M}^* := \mathcal{M} \setminus \{0\}$.

Wichtig ist folgender Zusammenhang zwischen den holomorphen Funktionen und dem $\bar{\partial}$ -Operator:

1.5 Satz:

Es sei E ein lokal-konvexer $\mathbb{C}$ -Vektorraum, $U \subset E$ offen und $f \in C^\infty(U)$. Dann ist f genau dann holomorph, wenn $\bar{\partial}f \equiv 0$ gilt.

Dieser Satz folgt aus der Tatsache, daß der $\bar{\partial}$ -Operator im eindimensionalen Fall analog zu 1.3 definiert ist, vgl. Peschl [32], Kap. III, §1.

Entsprechend der endlich-dimensionalen Theorie definieren wir die Weierstraß-Polynome:

1.6 Definition:

Ist E ein lokal-konvexer $\mathbb{C}$ -Vektorraum, $a \in E$ und F ein Komplementärraum von $\mathbb{C}a$ bezüglich E , so heißt eine holomorphe Funktion $f: E \cong \mathbb{C}a \times F \supset U \times V \rightarrow \mathbb{C}$ der Form

$$f(\zeta a + z') := \zeta^n + \sum_{k=0}^{n-1} g_k(z') \zeta^k$$

mit $g_k \in \mathcal{O}(V)$ Weierstraß-Polynom.

Im Zusammenhang mit den Weierstraß-Polynomen benötigen wir in Kapitel 6 einen algebraischen Begriff, die Diskriminante:

1.7 Definition:

Ist R ein Integritätsring und $f = X^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i \in R[X]$,

so heißt die Determinante

$$\delta_f = \begin{vmatrix} 1 & a_{n-1} & \dots & a_1 & a_0 & & & \\ & 1 & a_{n-1} & \dots & a_1 & a_0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & a_{n-1} & \dots & a_1 & a_0 \\ n & (n-1)a_{n-1} & \dots & a_1 & & & & \\ & n & \dots & 2a_2 & a_1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & n & (n-1)a_{n-1} & \dots & a_1 & \end{vmatrix}$$

die Diskriminante von f .

Wichtig ist für uns folgendes Lemma:

1.8 Lemma:

Sind $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ die Wurzeln von f (in einem Erweiterungskörper von R), so gilt $\delta_f = \prod_{1 \leq i < k \leq n} (\alpha_i - \alpha_k)^2$, d.h. die Diskriminante δ_f von f verschwindet genau dann, wenn f mehrfache Nullstellen besitzt.

Den Beweis dieses Lemmas findet man in §35 bei van der Waerden [49]. Hat der Quotientenkörper von R die Charakteristik 0, so folgt insbesondere, daß f genau dann irreduzibel ist, wenn $\delta_f \neq 0$ ist.

Nun kommen wir zur Verallgemeinerung einiger Begriffe aus der komplexen Analysis auf lokal-konvexe $\mathbb{C}$ -Vektorräume:

1.9 Definition:

Es sei E ein lokal-konvexer $\mathbb{C}$ -Vektorraum und $U \subset E$ offen. Wir definieren die Funktion $d_U: U \times (E \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ durch

$$d_U(z, z') := \inf\{|\lambda|; z + \lambda z' \notin U\}.$$

Die Menge U ist genau dann *pseudokonvex*, wenn $-\log d_U$ plurisubharmonisch ist. Dabei ist eine *plurisubharmonische Funktion* wie im endlich-dimensionalen Fall definiert (nach oben halbstetig und in allen Richtungen subharmonisch).

Wichtig ist folgender Satz (vgl. Noverraz [31], 2.1.5):

1.10 Satz:

$U \subset E$ ist genau dann pseudokonvex, wenn $U \cap F$ pseudokonvex ist für jeden endlich-dimensionalen Untervektorraum F von E .

1.11 Definition:

Es sei E ein lokal-konvexer $\mathbb{C}$ -Vektorraum, $U \subset E$ offen und $M \subset U$. Die Menge M heißt *$O(U)$ -konvex*, wenn die holomorph-konvexe Hülle

$$\hat{M} := \hat{M}_{O(U)} := \bigcap_{f \in O(U)} \{x \in U; |f(x)| \leq \|f\|_M\}$$

von M gleich M ist.

U heißt *holomorph-konvex*, wenn $\hat{K}_{O(U)} \subset U$ kompakt ist für jede kompakte Menge $K \subset U$.

Wir kommen nun zur Definition analytischer Mengen in lokal-konvexen Räumen:

1.12 Definition:

Es sei E ein lokal-konvexer $\mathbb{C}$ -Vektorraum und $U \subset E$ offen. Eine Teilmenge $A \subset U$ heißt *analytische Menge*, wenn es zu jedem $x \in U$ eine offene Umgebung $V_x \subset U$, einen lokal-konvexen $\mathbb{C}$ -Vektorraum F_x und eine holomorphe Abbildung $f_x: V_x \rightarrow F_x$ gibt mit $A \cap V_x = f_x^{-1}(0)$.

Kann man $F_x = \mathbb{C}$ wählen für jedes $x \in U$, so heißt A *analytische Hyperfläche*.

Ist $A \subset U$ eine analytische Menge, so ist die Untergarbe $I_A \subset \mathcal{O}$, definiert durch $I_A(V) := \{f \in \mathcal{O}(V); f|_A \equiv 0\}$ für eine offene Menge $V \subset U$, die *Idealgarbe* bezüglich A .

Ist $I \subset \mathcal{O}$ eine Idealgarbe von $\mathcal{O}$, so ist $V(I)$ der Träger von $\mathcal{O}/I$, d.h. $V(I) = \{x \in U; I_x \neq \mathcal{O}_x\}$.

Ist I_x endlich erzeugt für eine Idealgarbe $I \subset \mathcal{O}$ und $x \in U$, so ist $V(I)$ eine analytische Menge in U .

Auf Grund einer Verallgemeinerung eines Satzes von Remmert, Théorème VI.4 bei Mazet [30], ist folgende Definition endlich-dimensionaler analytischer Mengen sinnvoll:

1.13 Definition:

Es sei E ein separierter lokal-konvexer $\mathbb{C}$ -Vektorraum und $U \subset E$ offen. Eine Menge $A \subset U$ heißt *endlich-dimensionale analytische Teilmenge*, wenn es einen reduzierten komplexen

Raum X der klassischen Theorie und eine holomorphe, eigentliche und surjektive Abbildung $\phi: X \rightarrow A$ gibt.

Aus der Garbentheorie werden wir den Begriff der Bildgarbe benötigen:

1.14 Definition:

Sind X und Y topologische Räume, $f: X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung und $\mathcal{F}$ eine Garbe über X , so ist $f_*\mathcal{F}$, definiert durch $f_*\mathcal{F}(U) := \mathcal{F}(f^{-1}(U))$ für eine offene Menge $U \subseteq Y$, eine Garbe über Y und heißt *Bildgarbe* von $\mathcal{F}$ bezüglich f .

Es folgt sofort aus dieser Definition, daß für topologische Räume X, Y und Z und stetige Abbildungen $f: X \rightarrow Y$ und $g: Y \rightarrow Z$ gilt $(g \circ f)_*\mathcal{F} = g_*(f_*\mathcal{F})$ für eine Garbe $\mathcal{F}$ über X .

In Kapitel 2 werden wir sehen, daß das $\bar{\partial}$ -Problem in gewissen nuklearen Räumen (nämlich in $\mathcal{DFN}$ -Räumen) lösbar ist. Bevor wir zur Definition solcher Räume kommen, müssen wir nukleare Abbildungen definieren:

1.15 Definition:

Es seien E und F lokalkonvexe $\mathbb{C}$ -Vektorräume. Eine lineare Abbildung $T: E \rightarrow F$ heißt *nuklear*, wenn es eine gleichstetige Menge $\{a_n; n \in \mathbb{N}\} \subset E'$ (d.h. für eine stetige Halbnorm p auf E gilt $|a_n(x)| < p(x)$ für alle $x \in E$), eine beschränkte Menge $\{y_n; n \in \mathbb{N}\} \subset F$ und $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{C})$ gibt mit $T(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \gamma_n \cdot a_n(x) \cdot y_n$ für jedes $x \in E$.

Für Hilbert-Räume E und F definieren wir noch eine Verallgemeinerung von nuklearen Abbildungen, die ℓ^p -Abbildungen, vgl. Pietsch [33], wo ℓ^p -Abbildungen auch für normierte Räume definiert werden.

1.16 Definition:

Es seien E und F Hilbert-Räume. Eine Abbildung $T: E \rightarrow F$ heißt ℓ^p -Abbildung (für $p \in \mathbb{R}_+$), wenn es Orthonormalsysteme $(e_i)_{i \in I}$ und $(f_i)_{i \in I}$ von E bzw. F und eine Nullfolge $(\gamma_i)_{i \in I}$ positiver reeller Zahlen gibt mit $\sum_{i \in I} \gamma_i^p < \infty$ und

$$T(x) = \sum_{i \in I} \gamma_i \langle x, e_i \rangle f_i$$

für $x \in E$. Man nennt ℓ^2 -Abbildungen auch *Hilbert-Schmidt-Abbildungen*.

Es gilt nämlich, daß für Hilbert-Räume E und F die nuklearen Abbildungen identisch sind mit den ℓ^1 -Abbildungen, vgl. Pietsch [33], 8.3.3.

Wichtig ist auch folgender Satz ([33], 8.2.7):

1.17 Satz:

Sind E , F und G Hilbert-Räume, $T: E \rightarrow F$ eine ℓ^p -Abbildung und $S: F \rightarrow G$ eine ℓ^q -Abbildung, so ist $S \circ T$ eine ℓ^r -Abbildung mit $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$.

Insbesondere folgt daraus, daß die Komposition zweier Hilbert-Schmidt-Abbildungen nuklear ist.

Von den Eigenschaften der ℓ^p -Abbildungen sei folgende herausgestellt (vgl. Pietsch [33] 8.2.6 und Floret/Wloka [15] § 19, 1.2):

1.18 Satz:

ℓ^p -Abbildungen sind *kompakt*, d.h. Bilder beschränkter Mengen sind relativ-kompakt. Insbesondere sind ℓ^p -Abbildungen stetig.

Jetzt können wir nukleare Vektorräume definieren:

1.19 Definition:

Ein lokal-konvexer $\mathbb{K}$ -Vektorraum E heißt *nuklear*, wenn seine Vervollständigung $\tilde{E}$ der projektive Limes separierter folgenvollständiger lokal-konvexer Vektorräume $(E_\alpha)_{\alpha \in A}$ ist mit nuklearen Verbindungshomomorphismen $\pi_{\alpha, \beta}: E_\beta \rightarrow E_\alpha$ für $\alpha \leq \beta$.

Wir werden es hauptsächlich mit speziellen nuklearen Räumen, den *DFN*-Räumen zu tun haben:

1.20 Definition:

Ein *DFN-Raum* ist der Dualraum eines nuklearen Fréchet-Raumes bezüglich der starken oder der kompakt-offenen Topologie.

Wichtig ist folgende Darstellung von *DFN*-Räumen:

1.21 Satz:

Ein DFN -Raum E ist der induktive Limes abzählbar vieler Hilbert-Räume $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$, wobei die Verbindungshomomorphismen $\pi_{nm}: H_n \rightarrow H_m$ injektive nukleare Abbildungen sind.

Beweis:

E sei der Dualraum des nuklearen Fréchet-Raumes F . Nach Schaefer [40], III 7.3, Corollary 3, ist $F \cong \varprojlim \tilde{H}_n$ mit Hilbert-Räumen $\tilde{H}_n$ und nuklearen kanonischen Abbildungen $\phi_{mn}: \tilde{H}_n \rightarrow \tilde{H}_m$ für $m \leq n$. Mit Floret/Wloka [15], § 26, 1.4, kann man o.E. annehmen, daß $\phi_n(F)$ dicht liegt in $\tilde{H}_n$, und nach [15], § 27, 3.4 gilt $E = F' \cong (\varprojlim \tilde{H}_n)' \cong \varprojlim \tilde{H}_n' = \varprojlim H_n$ mit $H_n := \tilde{H}_n'$ und injektiven nuklearen (vgl. [15] § 21, 1.6) Abbildungen $\pi_{nm}: H_n \rightarrow H_m$ für $n \leq m$. ///

Dieser Satz 1.21 zeigt uns, daß DFN -Räume spezielle Silva-Räume sind:

1.22 Definition:

Der induktive Limes $E = \varinjlim B_n$ von abzählbar vielen komplexen Banach-Räumen B_n heißt *Silva-Raum*, wenn die Verbindungshomomorphismen $\pi_{nm}: B_n \rightarrow B_m$ (für $n \leq m$) injektiv und kompakt sind.

Ein Silva-Raum ist insbesondere separiert (Floret/Wloka [15], § 25, 1.4; bei [15] heißen Silva-Räume separierte (LS)-Räume) und vollständig ([15], § 26, 2.3).

Ein wesentlicher Grund dafür, daß Silva-Räume für die Analysis geeignet sind, sind die guten Eigenschaften ihrer kompakten Mengen.

1.23 Satz:

Es sei $E = \varinjlim B_n$ ein Silva-Raum und $M \subset E$ beschränkt. Dann gibt es eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$, so daß $M \subset B_n$ relativ-kompakt ist. Insbesondere ist $M \subset E$ relativ-kompakt und relativ-folgenkompakt.

Beweis:

Der erste Teil des Satzes folgt aus Floret/Wloka [15] § 25, 2.2 und der Kompaktheit der Abbildung $\pi_{n-1,n}: B_{n-1} \rightarrow B_n$. Der zweite Teil gilt, weil $\pi_n: B_n \rightarrow E$ kompakt ist, und der Banach-Raum B_n das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, und somit $M \subset B_n$ auch relativ-folgenkompakt ist. ///

Mit Floret/Wloka [15] § 25, 1.5 kann man folgern:

1.24 Satz:

Es sei $E = \varinjlim B_n$ ein Silva-Raum und $U \subset E$ offen. Eine Abbildung $f: U \rightarrow X$, wobei X ein beliebiger topologischer Raum sei, ist genau dann stetig (holomorph), wenn $f|_{B_n}$ stetig (holomorph) ist für alle $n \in \mathbb{N}$.

Eine wichtige Rolle wird die Hemikompaktheit offener Mengen eines Silva-Raumes spielen:

1.25 Definition:

Ein topologischer Raum X heißt *hemikompakt*, wenn er eine *zulässige Ausschöpfung* durch kompakte Mengen zuläßt, d.h. es gibt eine Folge kompakter Mengen $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$, so daß jede beliebige kompakte Menge $K \subset X$ in einem K_n enthalten ist.

1.26 Satz:

Es sei E ein Silva-Raum und $U \subset E$ offen. Dann ist U hemikompakt.

Beweis:

Es sei $E = \varinjlim B_n$ und L_n die abgeschlossene Kugel um 0 mit Radius n in B_n und $K_n := \overline{\pi_{n,n+1}(B_n)} \setminus \{x \in B_{n+1}; \inf_{y \notin U} \|x-y\|_{B_{n+1}} < \frac{1}{n}\}$. K_n ist kompakt in $U \subset B_{n+1}$, also auch in $U \subset E$, und $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine zulässige Ausschöpfung von U durch kompakte Mengen.

///

Ist $\Omega \subset E$ ein pseudokonvexes Gebiet, so läßt sich insbesondere eine zulässige Ausschöpfung $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ durch kompakte Mengen finden, und man kann o.E. annehmen, daß $K_n \subset B_n$ kompakt ist.

Wir fassen weitere Eigenschaften offener Mengen eines Silva-Raumes zusammen:

1.27 Satz:

Es sei E ein Silva-Raum und $U \subset E$ offen. Dann gilt:

a) U ist ein Lindelöf-Raum.

b) U ist ein k -Raum, d.h. eine Abbildung $U \rightarrow F$ ist genau dann stetig, wenn sie auf allen kompakten Mengen stetig ist.

c) U ist parakompakt.

d) E ist ein Schwartz-Raum.

Beweis:

a) U ist nach 1.26 hemikompakt, also insbesondere σ -kompakt (d.h. U läßt eine kompakte Ausschöpfung zu) und nach Grotemeyer [16], nach Definition 53, damit ein Lindelöf-Raum.

b) Nach Kelley [23], Chapter 7, genügt es zu zeigen, daß es zu einer nicht abgeschlossenen Menge $M \subset U$ eine kompakte Menge $K \subset U$ gibt, so daß $M \cap K$ nicht abgeschlossen ist. Zu M gibt es jedoch ein $n \in \mathbb{N}$, so daß $M \cap B_n$ nicht abgeschlossen ist (vgl. Floret/Wloka [15], § 25, 1.2). Da wiederum nach [23] $U \cap B_n$ ein k -Raum ist, weil $U \cap B_n$ das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, gibt es eine kompakte Menge $K \subset U \cap B_n$, so daß $M \cap K \cap B_n$ und damit $M \cap K \subset U$ nicht abgeschlossen ist.

c) U ist ein regulärer ([15], § 3, 1.2) Lindelöf-Raum und damit parakompakt (vgl. Grotemeyer [16], Satz 94).

d) Beschränkte Mengen in E sind relativ-kompakt (1.23), und somit ist E ein Schwartz-Raum (vgl. Horvath [22], Chapter 3, § 15, Proposition 4).

///

Schließlich kommen wir zur Definition der Schauder-Basis eines lokal-konvexen Vektorraumes:

1.28 Definition:

Es sei E ein lokal-konvexer $\mathbb{K}$ -Vektorraum. Eine Folge $(e_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset E$ heißt *Schauder Basis* von E , wenn es zu jedem $x \in E$ genau eine Folge $(\xi_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ gibt mit $x = \sum_{i \in \mathbb{N}} \xi_i e_i$, so daß die Projektionen $p_m: E \rightarrow E, \sum_{i \in \mathbb{N}} \xi_i e_i \mapsto \sum_{i=1}^m \xi_i e_i$ stetig sind.

1.29 Satz:

Es sei E ein Silva-Raum mit Schauder-Basis. Dann gibt es Banach-Räume B_n mit Schauder-Basis, so daß gilt $E \cong \varprojlim B_n$ mit injektiven kompakten Verbindungshomomorphismen.

Beweis:

Es seien $\tilde{B}_n$ Banach-Räume, so daß gilt $E = \varprojlim \tilde{B}_n$ mit injektiven kompakten Verbindungshomomorphismen $\tilde{\pi}_{nm}: \tilde{B}_n \rightarrow \tilde{B}_m$ für $n \leq m$, und es sei $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Schauder-Basis von E .

Nun sei B_n die in $\tilde{B}_n$ abgeschlossene Hülle des von $\{e_i; e_i \in \tilde{B}_n\}$ aufgespannten Vektorraums. B_n ist ein Banach-Raum mit Schauder-Basis, und die Abbildungen $\tilde{\pi}_{nm}$ induzieren injektive kompakte Abbildungen $\pi_{nm}: B_n \rightarrow B_m$. Ist $F := \varprojlim B_n$ und $\pi: F \rightarrow E$ definiert durch $\pi(x) := \tilde{\pi}_m(x)$ für $x \in B_m$, so ist π wohldefiniert, injektiv, stetig, surjektiv und nach Floret/Wloka [15] § 24 4.1 ein Homöomorphismus, d.h. $E \cong F \cong \varprojlim B_n$.

///

Schließlich gilt für Silva-Räume mit Schauder-Basis wie im endlich-dimensionalen Fall folgender wichtiger Satz, vgl. Schottenloher [42], 4.3:

1.30 Satz:

Es sei E ein Silva-Raum mit Schauder-Basis. Dann ist jedes pseudokonvexe Gebiet holomorph-konvex.

Bei der Lösung des $\tilde{\mathcal{O}}$ -Problems in Kapitel 2 benötigen wir Integrationstheorie auf Hilbert-Räumen. Dabei wird das Gauß-Maß eine wichtige Rolle spielen. Wir definieren es anhand seiner charakteristischen Funktion:

1.31 Definition:

Es sei H ein (reeller) Hilbert-Raum und $\mathcal{B}$ die σ -Algebra der Borel-Mengen auf H (d.h. die kleinste σ -Algebra auf H , welche alle offenen Teilmengen von H enthält). Für ein normiertes Maß μ auf $(H; \mathcal{B})$ (d.h. $\mu(H) = 1$) heißt dann $\chi: H \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto \int_H e^{i\langle z, x \rangle} d\mu(x)$ die charakteristische Funktion von μ auf H .

Auf Grund des Satzes von Minlos-Sazonov (vgl. Skorohod [47] § 4, Theorem 1) kann man ein Maß μ auf H mittels einer charakteristischen Funktion definieren:

1.32 Satz (Minlos-Sazonov):

Eine stetige positiv-definite Funktion $\chi: H \rightarrow \mathbb{C}$ ist genau dann die charakteristische Funktion eines Maßes μ

auf $(H; \mathcal{B})$, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ einen nuklearen Operator $S_\varepsilon: H \rightarrow H$ gibt mit $\operatorname{Re}(\chi(0) - \chi(z)) < \varepsilon$ für jedes $z \in H$ mit $\langle S_\varepsilon z, z \rangle < 1$.

Nun sind wir in der Lage, das Gauß-Maß auf H zu definieren:

1.33 Definition:

Es sei H ein reeller Hilbert-Raum, $\mathcal{B}$ die σ -Algebra der Borel-Mengen auf H , $a \in H$ und $A: H \rightarrow H$ ein nuklearer Operator. Dann heißt das durch die charakteristische Funktion $\chi: H \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto e^{i\langle a, z \rangle - \frac{1}{2}\langle Az, z \rangle}$ definierte Maß μ auf $(H; \mathcal{B})$ das *Gauß-Maß* mit *Mittelwert* a und *Korrelations-Operator* A . Das Gauß-Maß mit Mittelwert 0 wird auch als *zentriertes Gauß-Maß* bezeichnet.

Daß die Funktion χ aus Definition 1.33 ein Maß auf $(H; \mathcal{B})$ definiert, folgt aus dem Satz von Minlos-Sazanov (1.26), vgl. Skorohod [47], § 5.

Ist $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis von H , bestehend aus Eigenvektoren zu den Eigenwerten $(\gamma_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von A (diese existieren, da A eine ℓ^1 -Abbildung ist, siehe Bemerkung nach 1.16),

so ist $\mu = \prod_{k=1}^{\infty} \mu_k$, wobei

$$\mu_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma_k}} e^{-\frac{(x - \alpha_k)^2}{2\gamma_k}} d\lambda_1(x)$$

mit dem Lebesgue-Maß λ_1 auf $\mathbb{R}$ gilt, vgl. Skorohod [47], § 5.

Schließlich ist für uns noch folgender Satz wichtig:

1.34 Satz:

Es sei H ein reeller Hilbert-Raum und $T: H \rightarrow H$ ein Hilbert-Schmidt-Operator. Ist μ_T das zentrierte Gauß-Maß mit Korrelationsoperator T^2 , so ist $H \setminus TH$ eine μ_T -Nullmenge.

Beweis:

Es sei $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ solch eine Orthonormalbasis von H , daß der nukleare Operator T^2 die Darstellung

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \xi_i e_i \mapsto \sum_{i \in \mathbb{N}} \gamma_i \xi_i e_i \text{ mit } \gamma_i > 0 \text{ habe, vgl. 1.16. Dann ist}$$

$$TH = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} B_{nk} \text{ mit } B_{nk} := \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} \xi_i e_i \in H; \sum_{i=1}^n \frac{\xi_i^2}{\gamma_i} < k \right\}, \text{ und}$$

somit ist TH meßbar bezüglich μ_T mit Maß $\mu_T(TH) = 1$, man vergleiche etwa Skorohod [47] § 16, Theorem 2 in Verbindung mit Bauer [3], 17.11. ///

Ist X ein topologischer Raum und μ ein Maß auf X , so sei $\tilde{L}^p(X; \mu)$ für $p > 0$ die Menge aller Funktionen $f: X \rightarrow \mathbb{C}$, so daß $|f|^p$ μ -integrierbar ist. Mit

$$N_p := \{f \in \tilde{L}^p(X; \mu); f = 0 \text{ } \mu\text{-fast überall}\}$$

ist dann $L^p(X; \mu)$ der Banach-Raum $\tilde{L}^p(X; \mu)/N_p$. Für $p=2$ ist $L^2(X; \mu)$ ein Hilbert-Raum mit dem Skalarprodukt $\langle f, g \rangle := \int_X f(x) \overline{g(x)} d\mu(x)$.

Außerdem sei $\tilde{L}_{\text{lok}}^p(X; \mu)$ die Menge aller Funktionen $f: X \rightarrow \mathbb{C}$, so daß $|f|^p$ lokal μ -integrierbar ist. Dann sei $L_{\text{lok}}^p(X; \mu) := \tilde{L}_{\text{lok}}^p(X; \mu)/N_p$ der mit den Seminormen

$$\|f\|_K := \left(\int_K |f|^p d\mu \right)^{1/p} \text{ für kompakte Mengen } K \subset X$$

versehene lokal-konvexe Vektorraum (N_p sei analog wie oben definiert). Ist X hemikompakt, so ist $L_{\text{lok}}^p(X; \mu)$ ein Fréchet-Raum.

K A P I T E L 2

Die Lösung des $\bar{\partial}$ -Problems auf pseudokonvexen Gebieten eines DFN -Raumes

In diesem Kapitel wird uns vornehmlich der Beweis des folgenden Theorems beschäftigen:

2.1 Theorem:

Es sei E ein DFN -Raum und $\Omega \subset E$ ein pseudokonvexes Gebiet. Dann gibt es zu jeder $\bar{\partial}$ -geschlossenen C^∞ -(0,1)-Differentialform F auf Ω eine Funktion $f \in C^\infty(\Omega)$ mit $\bar{\partial}f = F$.

Bevor wir dieses Theorem beweisen, legen wir noch einige Vereinbarungen fest:

In diesem Kapitel sei E stets ein DFN -Raum; $E = \varinjlim H_n$ mit Hilbert-Räumen H_n und injektiven nuklearen Abbildungen $\pi_{nm}: H_n \rightarrow H_m$ (für $n \leq m$) und $\pi_n: H_n \rightarrow E$, welche den induktiven Limes definieren (vgl. Satz 1.21). Für $x \in H_n$ identifizieren wir jeweils x mit $\pi_{nm}(x) \in H_m$ (für $n \leq m$) bzw. mit $\pi_n(x) \in E$.

Es sei $\Omega \subset E$ ein pseudokonvexes Gebiet. $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei eine zulässige Ausschöpfung von Ω durch $O(\Omega)$ -konvexe kompakte Mengen K_n , so daß $K_n \subset H_n$ kompakt (und damit $O(\Omega \cap H_n)$ -konvex) ist, vgl. Schottenloher [44] Proposition 4.

Um das Theorem zu beweisen, zeigen wir zuerst die Existenz einer C^n -Lösung des $\bar{\partial}$ -Problems auf $K_n \subset H_n$:

2.2 Satz:

Für $n \in \mathbb{N}$ gibt es zu jeder $\bar{\partial}$ -geschlossenen C^∞ -(0,1)-Differentialform F auf Ω eine Funktion $f_n \in C^n(K_n)$ in H_n mit $\bar{\partial} f_n = F \cdot \pi_n|_{K_n}$.

Der Beweis dieses Satzes wird sich hauptsächlich auf Ergebnisse von Raboin [36] stützen. Um diese anwenden zu können, benötigen wir folgenden Hilfssatz:

2.3 Hilfssatz:

Es seien $H_1 \subset H_2$ Hilbert-Räume; $\pi: H_1 \rightarrow H_2$, $x \mapsto x$, sei eine Abbildung vom Typ $\ell^{2/p}$ (mit $p \in \mathbb{N}$). Dann gibt es eine injektive selbstadjungierte Hilbert-Schmidt-Abbildung $T: H_2 \rightarrow H_2$, so daß gilt: $\tau: H_1 \rightarrow T^p H_2$, $x \mapsto x$, ist wohldefiniert und eine Isometrie. Dabei sei $T^p H_2$ versehen mit der durch $\langle x, y \rangle_{T^p H_2} := \langle T^{-p} x, T^{-p} y \rangle_{H_2}$ definierten Hilbert-Struktur.

Beweis:

Es gibt eine Orthonormalbasis $(e_i)_{i \in I}$ in H_1 und ein Orthonormalsystem $(b_i)_{i \in I}$ in H_2 , so daß gilt

$$x = \pi(x) = \sum_{i \in I} \gamma_i \langle x, e_i \rangle_{H_1} b_i$$

mit $\gamma_i \in \mathbb{R}_+$ und $\sum_{i \in I} \gamma_i^{2/p} < \infty$ (vgl. 1.16). Es sei $(c_j)_{j \in J}$

eine Ergänzung des Orthonormalsystems $(b_i)_{i \in I}$ zur Orthonormalbasis in H_2 . Sei

$$T: H_2 \rightarrow H_2, \quad \sum_{i \in I} \xi_i b_i + \sum_{j \in J} \xi_j c_j \mapsto \sum_{i \in I} \gamma_i^{1/p} \xi_i b_i + \sum_{j \in J} \frac{1}{\gamma_j} \xi_j c_j.$$

T ist eine injektive selbstadjungierte Hilbert-Schmidt-Abbildung, denn es ist $\sum_{i \in I} \gamma_i^{2/p} + \sum_{j \in J} \frac{1}{j^2} < \infty$. Weiter sei

$$\tau: H_1 \rightarrow T^p H_2, \quad \sum_{i \in I} \xi_i e_i \mapsto \sum_{i \in I} \gamma_i \xi_i b_i.$$

Dann gilt $e_j = \pi(e_j) = \sum_{i \in I} \gamma_i \langle e_j, e_i \rangle_{H_1} b_i = \gamma_j b_j$, d.h.

$$\begin{aligned} \tau(x) &= x \text{ und } \|\tau(e_j)\|_{T^p H_2} = \|\gamma_j b_j\|_{T^p H_2} = \\ &= \|\tau^{-p}(\gamma_j b_j)\|_{H_2} = \|b_j\|_{H_2} = 1, \text{ d.h. } \tau \text{ ist wohldefiniert} \\ &\text{und eine Isometrie.} \end{aligned}$$

///

Nun beweisen wir Satz 2.2:

Beweis von Satz 2.2:

Es gibt eine beschränkte pseudokonvexe Umgebung W von K_n in $\Omega \cap H_{2n+2}$, z.B. $B_r^{H_{2n+2}} \cap \Omega$ für geeignetes $r > 0$ (diese Menge ist pseudokonvex, weil sie in endlich-dimensionalen Teilräumen pseudokonvex ist, vgl. Satz 1.10 und Hörmander [21], 2.6.9). Dann ist $F \circ \pi_{2n+2}|_W$ beschränkt, denn π_{2n+2} ist kompakt, und F ist stetig. Somit gibt es ein $C > 0$ mit

$$\|F \circ \pi_{2n+2}\|_W = \|F\|_{\pi_{2n+2}(W)} < C.$$

Nukleare Abbildungen zwischen Hilbert-Räumen sind Hilbert-Schmidt-Abbildungen und damit ℓ^2 -Abbildungen. Mit Satz 1.17 errechnet man somit, daß $\pi_{n,2n+2} = \pi_{n,n+1} \circ \dots \circ \pi_{2n+1,2n+2}$ eine $\ell^{2/(n+2)}$ -Abbildung ist. Deshalb gibt es nach Hilfssatz 2.3 eine injektive selbstadjungierte Hilbert-Schmidt-Abbildung $T: H_{2n+2} \rightarrow H_{2n+2}$, so daß gilt: $\tau: H_n \rightarrow T^{n+2} H_{2n+2}$, $x \mapsto x$, ist wohldefiniert und eine Isometrie,

wenn $T^{n+2}H_{2n+2}$ mit der durch

$$\langle x, x \rangle_{T^{n+2}H_{2n+2}} := \langle T^{-n-2}x, T^{-n-2}y \rangle_{H_{2n+2}}$$
 definierten Hilbert-

Struktur versehen ist.

Sei $(b_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis von H_{2n+2} , bestehend aus Eigenvektoren von T (solch eine Basis existiert nach Konstruktion von T im Beweis von Hilfssatz 2.3, vgl. auch Dieudonné [10], 11.5.7), und für $m \in \mathbb{N}$ sei p_m die Projektion in H_{2n+2} auf die ersten m Koordinaten $b_1, \dots, b_m$;

$H_{2n+2}^m := p_m H_{2n+2} \cong \mathbb{C}^m$. Weiter sei $W^m := p_m^{-1}(W \cap H_{2n+2}^m)$ und

μ_T das zentrierte Gauß-Maß mit Korrelation T^2 auf H_{2n+2} .

Schließlich sei $\sigma_i: T^i H_{2n+2} \rightarrow H_{2n+2}$, $x \mapsto x$. Es ist σ_i ebenso stetig wie $\tilde{\sigma}_i: T^i H_{2n+2} \rightarrow TH_{2n+2}$, $x \mapsto x$.

Nun folgt Satz 2.2 aus Sätzen von Raboin [36], die im Folgenden ausführlich bewiesen werden: Nach Hilfssatz 2.4 gibt es eine echt monoton wachsende Folge $(n_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$

und Funktionen $f_{n_k} \in C^\infty(W^{n_k})$, die (auf W beschränkt und trivial fortgesetzt) in $L^2(W; \mu_T)$ schwach gegen eine Funktion $\tilde{f} \in L^2(W; \mu_T)$ konvergieren. Nach Hilfssatz 2.5 gibt es eine

lokal gleichmäßig stetige Funktion $f^* \in C(W \cap TH_{2n+2})$ mit

$f_{n_k} \circ \sigma_1|_{W \cap TH_{2n+2}} \rightarrow f^*$. Nach Hilfssatz 2.7 ist sogar

$f^* \circ \tilde{\sigma}_{n+1} \in C^n(W \cap T^{n+1}H_{2n+2})$, und $\tilde{\sigma} f^* \circ \tilde{\sigma}_{n+2} = F \circ \pi_{2n+2} \circ \sigma_{n+2}$

auf $W \cap T^{n+2}H_{2n+2}$ gemäß Hilfssatz 2.8.

Definieren wir $f := f^* \circ \tilde{\sigma}_{n+2} \circ \tau \in C^n(W \cap H_n)$, so ist

$$\begin{aligned} f \in C^n(K_n) \text{ in } H_n \text{ und } \tilde{\partial} f &= \tilde{\partial}(f * \tilde{\sigma}_{n+2} \circ \tau) = F \circ \pi_{2n+2} \circ \sigma_{n+2} \circ \tau = \\ &= F \circ \pi_{2n+2} \circ \pi_{n, 2n+2} = F \circ \pi_n \text{ auf } W \cap H_n. \end{aligned} \quad ///$$

Bevor wir die im Beweis von Satz 2.2 benötigten Hilfs-sätze formulieren und beweisen, benötigen wir noch einige zusätzliche Vereinbarungen:

Es sei H ein Hilbert-Raum mit einer Orthonormalbasis $(b_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von Eigenvektoren einer injektiven selbstadjungierten Hilbert-Schmidt-Abbildung $T: H \rightarrow H$. T hat reelle Eigenwerte, und wegen der Hilbert-Schmidt-Eigenschaft existiert das Supremum γ der Eigenwerte von T . Die Projektion $H \rightarrow H$, $\sum_{i \in \mathbb{N}} \xi_i b_i \mapsto \sum_{i=1}^n \xi_i b_i$ auf die ersten n Komponenten werde mit p_n bezeichnet; $H^n := p_n H$. Weiter sei $W \subset H$ ein beschränktes pseudokonvexes Gebiet, $W^n := p_n^{-1}(W \cap H^n)$, und F sei eine (einschließlich aller ihrer Ableitungen) beschränkte, $\tilde{\partial}$ -geschlossene C^∞ -(0,1)-Differentialform auf W . Das zentrierte Gauß-Maß auf H mit Korrelation T^2 werde mit μ_T bezeichnet.

Damit kommen wir zum ersten Hilfssatz:

2.4 Hilfssatz (vgl. Raboin [36], Théorème 2):

Es gibt eine echt monoton wachsende Folge $(n_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ und Funktionen $f_{n_k} \in C^\infty(W^{n_k})$ und $f \in L^2(W; \mu_T)$, so daß f_{n_k} (auf W beschränkt und trivial fortgesetzt) schwach in

$L^2(W; \mu_T)$ gegen f konvergiert, und daß weiter die Gleichungen

$$f_{n_k} = f_{n_k} \circ p_{n_k} \quad \text{und} \quad \bar{\partial} f_{n_k} |_{W \wedge W^{n_k}} = F \circ p_{n_k} |_{W \wedge W^{n_k}} \quad \text{gelten.}$$

Beweis:

Ist $\gamma_i \in \mathbb{R}_+$ der Eigenwert von T zum Eigenvektor b_i , so sei

$$T_n: \mathbb{C}^n \rightarrow p_n H, \quad (z_1, \dots, z_n) \mapsto \sum_{i=1}^n \gamma_i z_i b_i, \quad E_n := T_n^{-1}(W \wedge H^n) \quad \text{und}$$

$\tilde{F}_n$ eine $\bar{\partial}$ -geschlossene $C^\infty(0,1)$ -Differentialform auf E_n , definiert durch $\tilde{F}_n(z)(y) := F(T_n z)(T_n y)$ für $z \in E_n$ und $y \in \mathbb{C}^n$ (ab einem gewissen $n \in \mathbb{N}$ ist $W \wedge H^n \neq \emptyset$). Dann gilt

$$\| \tilde{F}_n(z) \| \leq \gamma \| F(T_n z) \| \quad \text{für } z \in E_n.$$

Nach Voraussetzung gibt es ein $C > 0$ mit $\| F \|_W < C$,

und ist λ_{2n} das Lebesgue-Maß auf dem $\mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{C}^n$, so gilt

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{E_n} \frac{\| \tilde{F}_n(z) \|^2}{C^2} e^{-\frac{1}{2} \| z \|^2} d\lambda_{2n}(z) \leq \\ & \leq \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{E_n} \frac{\gamma^2 \| F(T_n(z)) \|^2}{C^2} e^{-\frac{1}{2} \| z \|^2} d\lambda_{2n}(z) = \\ & = \gamma^2 \int_{W^n} \frac{\| F(p_n x) \|^2}{C^2} d\mu_T(x) \leq \gamma^2 \int_{W^n} d\mu_T(x) \leq \gamma^2 \quad (\text{da } \mu_T \text{ ein nor-} \\ & \text{miertes Maß ist), wenn man die Integral-Transformationsformel,} \end{aligned}$$

vgl. Bauer [3], 18.2, auf $T_n^{-1} \circ p_n: H \rightarrow \mathbb{C}^n$ anwendet. Mit

Hörmander [21], 4.4.1, folgert man daher (mit $c := \frac{1}{2}$), daß

es eine Funktion $\tilde{f}_n \in L^2(E_n; \lambda_{2n})$ gibt mit $\bar{\partial} \tilde{f}_n = \tilde{F}_n$ (im

Distributionssinne) und

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{E_n} \frac{\| \tilde{f}_n(z) \|^2}{C^2} e^{-\frac{1}{2} \| z \|^2} d\lambda_{2n}(z) \leq 2\gamma^2 \quad (\text{denn } \phi: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R},$$

$z \mapsto \frac{1}{2} \| z \|^2$ ist eine strikt plurisubharmonische C^∞ -Funktion

$$\text{mit } \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 \phi}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} w_j \bar{w}_k = \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} w_j \bar{w}_j = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n |w_j|^2 \text{ für } z, w \in \mathbb{C}^n).$$

Da der $\bar{\partial}$ -Operator im endlich-dimensionalen Fall hypoelliptisch ist (man vergleiche etwa Schwartz [45], Chapitre V, § 6) ist $\tilde{f}_n$ eine C^∞ -Funktion, vgl. Hörmander [20], Cor. 4.1.2.

Nun sei

$$f_n := \tilde{f}_n \circ T_n^{-1} \circ p_n \in C^\infty(W^n).$$

Es gilt $f_n = \tilde{f}_n \circ p_n$ und $\bar{\partial} f_n(x)(y) = (\bar{\partial} \tilde{f}_n \circ T_n^{-1} \circ p_n)(x)(y) = \tilde{F}_n(T_n^{-1} \circ p_n(x))(T_n^{-1} \circ p_n(y)) = F(p_n x)(p_n y)$ für $x \in W^n$ und $y \in H$, und die Integral-Transformationsformel, angewandt auf

$$T_n^{-1} \circ p_n: H \rightarrow \mathbb{C}^n, \text{ ergibt}$$

$$2C^2 \gamma^2 \geq \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{E_n} |\tilde{f}_n(z)|^2 e^{-\frac{1}{2} \|z\|^2} d\lambda_{2n}(z) = \int_{W^n} |f_n(x)|^2 d\mu_T(x).$$

Beschränkt man f_n auf $W \cap W^n$ und setzt es dann trivial auf W fort, so ist damit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $L^2(W; \mu_T)$ beschränkt. $L^2(W; \mu_T)$ ist ein Hilbert-Raum und folglich reflexiv (vgl. Schaefer [40], Ch. IV, Example 2 nach 5.8), d.h.

$\{f_n: n \in \mathbb{N}\} \subset L^2(W; \mu_T)$ ist schwach relativ-kompakt (siehe Köthe [26], § 23, 5. (3)) und damit schwach relativ-folgen-kompakt ([26], § 24, 3. (8)). Somit gibt es eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ von $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und eine Funktion $f \in L^2(W; \mu_T)$, so daß f_{n_k} schwach gegen f konvergiert. ///

Jetzt seien im Folgenden $f_{n_k} \in C^\infty(W^{n_k})$ und $f \in L^2(W; \mu_T)$ die Funktionen aus Hilfssatz 2.4. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, daß $n_k = k$ sei, d.h. wir betrachten

eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $f_n \in C^\infty(W^n)$.

Weiter sei fortan $\mu_{T,z}$ das Gauß-Maß mit Zentrum $z \in H$ und Korrelation T^2 . Nach Skorohod [47], § 16, Theorem 2, ist $\mu_{T,z}$ genau dann absolut stetig bezüglich μ_T , wenn $z \in TH$ ist, und es gilt

$$\rho_T(x; z) := \frac{d\mu_{T,z}(x)}{d\mu_T(x)} = e^{\operatorname{Re}\langle T^{-1}z, T^{-1}x \rangle - \frac{1}{2} \|T^{-1}z\|^2},$$

denn ist $H^{\mathbf{R}}$ der H zu Grunde liegende reelle Hilbert-Raum, so ist $\langle x, y \rangle_{H^{\mathbf{R}}} = \operatorname{Re}\langle x, y \rangle_H$.

Sind γ_i die Eigenwerte von T zu den Eigenvektoren e_i , und ist $z = \sum_{i=1}^{\infty} \zeta_i e_i$, so gilt $\int_H |\rho_T(x; z)|^2 d\mu_T(x) =$

$$\int_H e^{2\operatorname{Re}\langle T^{-1}z, T^{-1}x \rangle - \|T^{-1}z\|^2} d\mu_T(x) =$$

$$= e^{-\|T^{-1}z\|^2} \cdot \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi\gamma_i^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\frac{\operatorname{Re}\zeta_i \cdot \operatorname{Re}\xi_i}{\gamma_i^2} - \frac{(\operatorname{Re}\xi_i)^2}{2\gamma_i^2}} d\lambda_1(\operatorname{Re}\xi_i) \cdot$$

$$\cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\frac{\operatorname{Im}\zeta_i \cdot \operatorname{Im}\xi_i}{\gamma_i^2} - \frac{(\operatorname{Im}\xi_i)^2}{2\gamma_i^2}} d\lambda_1(\operatorname{Im}\xi_i) =$$

$$= e^{\|T^{-1}z\|^2} \cdot \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi\gamma_i^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-(\operatorname{Re}\xi_i - 2\operatorname{Re}\zeta_i)^2}{2\gamma_i^2}} d\lambda_1(\operatorname{Re}\xi_i) \cdot$$

$$\cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-(\operatorname{Im}\xi_i - 2\operatorname{Im}\zeta_i)^2}{2\gamma_i^2}} d\lambda_1(\operatorname{Im}\xi_i) =$$

$$= e^{\|T^{-1}z\|^2}, \text{ d.h. insbesondere } \rho_T(\cdot; z) \in L^2(H; \mu_T) \text{ f\"ur } z \in TH.$$

Schließlich sei $\sigma_i: T^i H \rightarrow H$, $x \mapsto x$ und $\tilde{\sigma}_i: T^i H \rightarrow TH$, $x \mapsto x$. Beide Abbildungen sind stetig.

2.5 Hilfssatz (vgl. Raboin [36], Théorème 1 (i)):

Es gibt eine lokal gleichmäßig stetige Funktion

$f^*: W \cap TH \rightarrow \mathbb{C}$, so daß $f_n \circ \sigma_1|_{W \cap TH}$ punktweise gegen f^* konvergiert.

Beweis:

Sei $z \in W \cap TH$ beliebig. Es gibt ein $\varepsilon > 0$, so daß $B_{2\varepsilon}(z)$ in W enthalten ist. Für $n \rightarrow \infty$ konvergiert $p_n z$ gegen z , und deshalb gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\|p_n z - z\| < \varepsilon$ und damit $p_n z \in W$ für $n \geq n_0$. Für $n \geq n_0$ und $w \in B_\varepsilon(z)$ gilt dann $\|p_n w - p_n z\| \leq \|w - z\| < \varepsilon$ und somit $\|p_n w - z\| \leq \|p_n w - p_n z\| + \|p_n z - z\| < 2\varepsilon$, d.h. $p_n w \in W$. Damit wurde $B_\varepsilon(z) \in W^n$ gezeigt für $n \geq n_0$.

Es sei $x \in B_\varepsilon := B_\varepsilon(0)$ beliebig und

$\phi: \{\zeta \in \mathbb{C}; |\zeta| \leq 1\} \rightarrow H, \zeta \mapsto z + \zeta x$. Wendet man die Cauchy-Integralformel (vgl. Hörmander [21], 1.2.1) auf die Funktion $\psi_n := f_n \circ \phi: \{\zeta \in \mathbb{C}; |\zeta| \leq 1\} \rightarrow \mathbb{C}, \zeta \mapsto f_n(z + \zeta x)$ für $n \geq n_0$ an, so erhält man

$$\begin{aligned} f_n(z) &= \psi_n(0) = \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{|\zeta|=1} \frac{\psi_n(\zeta)}{\zeta} d\zeta + \iint_{|\zeta|<1} \frac{\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \psi_n(\zeta)}{\zeta} d\zeta d\bar{\zeta} \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{\psi_n(\zeta)}{\zeta} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \iint_{|\zeta|<1} \bar{\partial} f_n(\phi(\zeta)) \left(\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \phi(\zeta) \right) \cdot \frac{1}{\zeta} d\zeta d\bar{\zeta} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi_n(e^{i\theta}) d\theta + \frac{1}{2\pi i} \iint_{|\zeta|<1} \bar{\partial} f_n(\phi(\zeta))(\bar{x}) \frac{\bar{\zeta}}{|\zeta|^2} d\zeta d\bar{\zeta} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_n(z + x e^{i\theta}) d\theta + \frac{1}{2\pi i} \iint_{|\zeta|<1} \bar{\partial} f_n(z + \zeta x) \left(\frac{\bar{\zeta} x}{|\zeta|^2} \right) d\zeta d\bar{\zeta} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_n(z + x e^{i\theta}) d\theta + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \bar{\partial} f_n(z + r x e^{i\theta}) (x e^{i\theta}) dr d\theta, \end{aligned}$$

wenn man $\zeta = r e^{i\theta}$ mit $r \in [0, 1]$ und $\theta \in [0, 2\pi[$ substituiert.

Dabei sei $\bar{\partial}$ der komplex antilineare Anteil der (reellen Fréchet-) Ableitung D .

Integrieren wir diese Formel in B_ϵ nach x bezüglich des Maßes μ_T , so erhalten wir mit dem Satz von Lebesgue-Fubini (Bourbaki [6], § 8, n° 4, Théorème 1 ist anwendbar wegen des Remarque in Bourbaki [7], § 2, n° 7) und wegen der Rotationsinvarianz von μ_T auf H_n (denn in unserem Fall gilt $f_n = f_n \circ p_n$ und λ_{2n} ist rotationsinvariant)

$$\begin{aligned} f_n(z) \mu_T(B_\epsilon) &= \int_{B_\epsilon} f_n(z) d\mu_T(x) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{B_\epsilon} \int_0^{2\pi} f_n(z + x e^{i\theta}) d\theta d\mu_T(x) + \frac{1}{\pi} \int_{B_\epsilon} \int_0^{2\pi} \bar{\partial} f_n(z + r x e^{i\theta}) (x e^{i\theta}) d\theta dr d\mu_T(x) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_{B_\epsilon} f_n(z + x) d\mu_T(x) + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_{B_\epsilon} \bar{\partial} f_n(z + r x)(x) dr d\mu_T(x) = \\ &= \int_{z \in B_\epsilon} f_n(x) \rho_T(x; z) d\mu_T(x) + 2 \int_{B_\epsilon} \bar{\partial} f_n(z + r x)(x) dr d\mu_T(x). \quad (*) \end{aligned}$$

Wie vor diesem Hilfssatz gezeigt, ist $\rho_T(\cdot; z) \in L^2(z + B_\epsilon; \mu_T)$, und weil f_n in $L^2(W; \mu_T)$ schwach gegen f konvergiert, strebt das erste Integral von (*) gegen $\int_{z+B_\epsilon} f(x) \rho_T(x; z) d\mu_T(x) = \int_{B_\epsilon} f(x+z) d\mu_T(x)$ für $n \rightarrow \infty$.

Für das zweite Integral von (*) erhält man

$$\begin{aligned} \int_{B_\epsilon} \bar{\partial} f_n(z + r x)(x) dr d\mu_T(x) &= \int_{B_\epsilon} \bar{\partial} F \circ p_n(z + r x)(x) dr d\mu_T(x) \rightarrow \\ &\rightarrow \int_{B_\epsilon} \bar{\partial} F(z + r x)(x) dr d\mu_T(x) \text{ für } n \rightarrow \infty \text{ nach dem Satz von Lebesgue} \end{aligned}$$

(vgl. Bourbaki [5], Chap. IV, § 3, n° 7, Théorème 6), der gemäß dem Schluß von § 1, n° 10 aus Bourbaki [7], und weil F beschränkt ist, hier im nicht-lokal-kompakten Fall anwendbar ist.

Somit haben wir gezeigt, daß $f_n \circ \sigma_1(z)$ für $z \in W \cap TH$ gegen $f^*(z) := \frac{1}{\mu_T(B_\varepsilon)} \int_{B_\varepsilon} f(x+z) d\mu_T(x) + 2 \int_{B_\varepsilon} \frac{1}{0} F(z+rx)(x) dr d\mu_T(x)$ konvergiert für $n \rightarrow \infty$.

Die lokal gleichmäßige Stetigkeit des ersten f^* definierenden Integrals folgt nun aus Lemma 2.6, die des zweiten Integrals daraus, daß F eine beschränkte Ableitung hat und deshalb selbst gleichmäßig stetig ist. ///

2.6 Lemma (vgl. Raboin [36], Proposition):

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $g_n \in C^\infty(W^n)$ der Form $g_n = \tilde{g}_n \circ T_n^{-1} \circ p_n$ mit $\tilde{g}_n \in C^\infty(T_n^{-1} \cdot p_n(W))$, und g_n konvergiere punktweise gegen $g \in L^2(W; \mu_T)$. Es seien $B_1 \subseteq W \cap TH$ und $B_2 \subset H$ beschränkte konvexe Umgebungen, so daß $\bigcup_{z \in B_1} (z+B_2)$ in W enthalten ist. Dann ist $B_1 \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto \int_{B_2} g(x+z) d\mu_T(x)$ gleichmäßig stetig.

Beweis:

Für $z \in H$ sei ${}_zg: W-z \rightarrow \mathbb{C}$, $w \mapsto g(w+z)$, und entsprechend sei ${}_zg_n$ definiert. Dabei sei $W-z := \bigcup_{x \in W} \{x-z\}$.

Aus den Voraussetzungen folgt, daß g_n beschränkt ist auf beschränkten Mengen, und somit ist $g_n \in L^p_{\text{lok}}(W^n; \mu_T)$ für $p \in \{1, 2\}$. Daß $g \in L^1_{\text{lok}}(W; \mu_T)$ ist, folgt aus der Hölderschen Ungleichung (Hirzebruch/Scharlau [19], 11.5), und weil μ_T ein endliches Maß ist.

Für $z \in B_1$ gilt $\| {}_z g_n - {}_z g \|_{L^1(B_2; \mu_T)} =$
 $= \int_{z+B_2} |g_n(x) - g(x)| \rho_T(x; z) d\mu_T(x) \leq$
 $\leq \| g_n - g \|_{L^2(z+B_2; \mu_T)} \cdot \| \rho_T(x; z) \|_{L^2(z+B_2; \mu_T)} \leq$
 $\leq \| g_n - g \|_{L^2(z+B_2; \mu_T)} \cdot e \| T^{-1} z \|$, d.h. $({}_z g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert
in $L^1(B_2; \mu_T)$ gegen ${}_z g$, und es gibt ein $N \in \mathbb{N}$ mit
 $\| {}_z g - {}_z g_n \|_{L^1(B_2; \mu_T)} < \frac{\varepsilon}{3}$ für $n \geq N$ für $z \in B_1$, wenn $\varepsilon > 0$
beliebig vorgegeben ist.

Da $\tilde{g}_N$ auf beschränkten Mengen gleichmäßig stetig ist
(vgl. etwa Dieudonné [10], 8.5.4), ist $g_N|_B$ gleichmäßig
stetig, d.h. es gibt ein $\delta > 0$ mit $|({}_z g_N - {}_{z'} g_N)(x)| < \frac{\varepsilon}{3\mu_T(B_2)}$
für $x \in B_2$ und $\| z - z' \|_H < \gamma\delta$ und damit für $\| z - z' \|_{TH} < \delta$,
denn dann ist $\| z - z' \|_H \leq \gamma \| z - z' \|_{TH} < \gamma\delta$.

Somit gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit

$$\left| \int_{B_2} g(x+z) d\mu_T(x) - \int_{B_2} g(x+z') d\mu_T(x) \right| \leq \| {}_z g - {}_{z'} g \|_{L^1(B_2; \mu_T)} \leq$$

$$\leq \| {}_z g - {}_z g_N \|_{L^1(B_2; \mu_T)} + \| {}_z g_N - {}_{z'} g_N \|_{L^1(B_2; \mu_T)} +$$

$$+ \| {}_{z'} g_N - {}_{z'} g \|_{L^1(B_2; \mu_T)} < \varepsilon \text{ für } z, z' \in B_1 \text{ mit } \| z - z' \|_{TH} < \delta.$$

///

Wir zeigen nun die Differenzierbarkeit von f^* , vgl.
Raboin [36], Théorème 1 (ii) für $k=1$.

2.7 Hilfssatz:

Für $k \in \mathbb{N}$ ist f^* auf $W \cap T^{k+1}H$ in Richtung von $T^{k+1}H$
 k -mal stetig differenzierbar.

Beweis:

Wir zeigen zuerst, daß $f^*|_{W \cap T^2H}$ in Richtung von T^2H differenzierbar ist:

Es sei μ_T^1 das zentrierte Gauß-Maß mit Korrelation T^2 auf TH , $z \in W \cap T^2H$ beliebig und $\varepsilon > 0$, so daß $B_{2\varepsilon}^1(z)$, die Kugel in TH um z mit Radius 2ε (in der Metrik von TH), in $W \cap TH$ enthalten ist. Dann gilt wie im Beweis zu Hilfssatz 2.5

$$f_n(z) = \frac{1}{\mu_T^1(B_\varepsilon^1)} \left(\int_{z+B_\varepsilon^1} f_n \circ \sigma_1(x) \rho_T^1(x; z) d\mu_T^1(x) + \right. \\ \left. + 2 \int_{B_\varepsilon^1} \int_0^1 (F \circ p_n \circ \sigma_1)(z+rx)(x) dr d\mu_T^1(x) \right)$$

für $n \in \mathbb{N}$ groß genug (so daß $z \in W^n$ ist), wobei

$$\rho_T^1(\cdot; z) := \frac{d\mu_T^1}{d\mu_T^1} z \text{ entsprechend wie } \rho_T(\cdot; z) \text{ definiert sei.}$$

Im Beweis von Hilfssatz 2.4 wurde gezeigt, daß $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $L^2(W; \mu_T)$ beschränkt ist. Damit ist auch $(f_n \circ \sigma_1)_{n \in \mathbb{N}}$ in $L^2(W \cap TH; \mu_T^1)$ und $((f_n \circ \sigma_1) \cdot \rho_T^1(\cdot; z))_{n \in \mathbb{N}}$ in $L^1(z+B_\varepsilon^1; \mu_T^1)$ beschränkt, und nach dem Satz von Lebesgue erhält man beim Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ mit Hilfssatz 2.5

$$f^*(z) = \frac{1}{\mu_T^1(B_\varepsilon^1)} \left(\int_{z+B_\varepsilon^1} f^*(x) \rho_T^1(x; z) d\mu_T^1(x) + \right. \\ \left. + 2 \int_{B_\varepsilon^1} \int_0^1 (F \circ \sigma_1)(z+rx)(x) dr d\mu_T^1(x) \right).$$

Um die Differenzierbarkeit des ersten Integrals $I_1(z)$ zu zeigen, betrachten wir die Funktion

$$g: \{z \in T^2H; B_{2\varepsilon}^1(z) \subset W \cap TH\} \times \{z \in TH; B_\varepsilon^1(z) \subset W\} \rightarrow \mathbb{C}, \\ (v, w) \mapsto \int_{w+B_\varepsilon^1} f^*(x) \rho_T^1(x; v) d\mu_T^1(x).$$

Da $I_1(z) = g(z, z)$ gilt für $z \in W \cap T^2H$ mit $B_{2\varepsilon}^1(z) \subset W$, genügt es, die Differenzierbarkeit von g zu zeigen.

Zuerst zeigen wir die Differenzierbarkeit von g nach v : Für $h \in T^2H$ betrachten wir die Funktion

$$G_{v,h}: \{t \in \mathbb{R}; B_{2\varepsilon}^1(v+th) \subset W\} \rightarrow \mathbb{C}, \quad t \mapsto \int_{w+B_\varepsilon^1} f^*(x) \rho_T^1(x; v+th) d\mu_T^1(x).$$

Wegen der Bemerkung bei Bourbaki [7] am Schluß von n^0 10 in § 1 können wir Dieudonné [10], 13.8.6, anwenden und erhalten (da $\rho_T^1(x; v+th)$ in einer Umgebung von $t=0$ beschränkt ist ebenso wie $2t \|h\|_{T^2H}$)

$$\begin{aligned} G'_{v,h}(0) &= \int_{w+B_\varepsilon^1} f^*(x) \frac{d}{dt} \rho_T^1(x; v+th)(0) d\mu_T^1(x) = \\ &= \int_{w+B_\varepsilon^1} f^*(x) \rho_T^1(x; v) \frac{d}{dt} (\operatorname{Re} \langle v+th, x \rangle_{T^2H} - \frac{1}{2} \|v+th\|_{T^2H}^2)(0) d\mu_T^1(x) = \\ &= \int_{w+B_\varepsilon^1} f^*(x) \rho_T^1(x; v) (\operatorname{Re} \langle h, x \rangle_{T^2H} - \frac{1}{2} (\langle v, h \rangle_{T^2H} + \langle h, v \rangle_{T^2H})) d\mu_T^1(x) = \\ &= \int_{w+B_\varepsilon^1} f^*(x) \rho_T^1(x; v) \operatorname{Re} \langle x-v, h \rangle_{T^2H} d\mu_T^1(x). \end{aligned}$$

Gâteaux-differenzierbar mit der Ableitung

$$D_v g(v, w)(h) = \int_{w+B_\varepsilon^1} f^*(x) \rho_T^1(x; v) \operatorname{Re} \langle x-v, h \rangle_{T^2H} d\mu_T^1(x).$$

Um die Fréchet-Differenzierbarkeit von g nach v zu zeigen, müssen wir noch beweisen, daß $D_v g(v, w)(h)$ beschränkt ist, wenn h eine beschränkte Teilmenge von T^2H durchläuft (d.h. die lineare Abbildung $D_v g(v, w): T^2H \rightarrow \mathbb{C}$ muß stetig sein). Das folgt aber sofort aus der Ungleichung $|D_v g(v, w)(h)| =$

$$= \|f^*(x) \rho_T^1(x; v) \operatorname{Re} \langle x-v, h \rangle_{T^2H}\|_{L^1(w+B_\varepsilon^1; \mu_T^1)} \leq$$

$$\leq \|f^*\|_{L^2(w+B_\varepsilon^1; \mu_T^1)} \cdot \|\rho_T^1(x; v)\|_{L^2(w+B_\varepsilon^1; \mu_T^1)} \|x-v\|_{T^2H}$$

da der letzte Faktor endlich ist:

$$\begin{aligned}
 & \left\| \rho_T(x; v) \cdot \|x - v\|_{T^2H} \right\|_{L^2(w + B_{\varepsilon}^1; \mu_T^1)} \leq \\
 & \leq \int_{TH} \|x\|_{T^2H}^2 \cdot e^{\operatorname{Re}\langle v, x-v \rangle_{T^2H} - \frac{1}{2} \|v\|_{T^2H}^2} d\mu_T^1(x) = \\
 & = e^{\frac{1}{2} \|v\|_{T^2H}^2} \int_{TH} \|x\|_{T^2H}^2 \cdot e^{\operatorname{Re}\langle v, x \rangle_{T^2H}} d\mu_T^1(x) \text{ mit} \\
 & \int_{TH} \|x\|_{T^2H}^2 \cdot e^{\operatorname{Re}\langle v, x \rangle_{T^2H}} d\mu_T^1(x) = \\
 & = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi\gamma_k^2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\operatorname{Re} x_k)^2}{\gamma_k^2} e^{\frac{\operatorname{Re} x_k \cdot \operatorname{Re} v_k}{\gamma_k^2} - \frac{(\operatorname{Re} x_k)^2}{2\gamma_k^2}} d\lambda_1(\operatorname{Re} x_k) \cdot \\
 & \quad \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\operatorname{Im} x_k)^2}{\gamma_k^2} e^{\frac{\operatorname{Im} x_k \cdot \operatorname{Im} v_k}{\gamma_k^2} - \frac{(\operatorname{Im} x_k)^2}{2\gamma_k^2}} d\lambda_1(\operatorname{Im} x_k) = \\
 & = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi\gamma_k^2} e^{\frac{(\operatorname{Re} v_k)^2}{2\gamma_k^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\operatorname{Re} x_k)^2}{\gamma_k^2} e^{\frac{(\operatorname{Re} x_k - \operatorname{Re} v_k)^2}{2\gamma_k^2}} d\lambda_1(\operatorname{Re} x_k) \cdot \\
 & \quad \cdot e^{\frac{(\operatorname{Im} v_k)^2}{2\gamma_k^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\operatorname{Im} x_k)^2}{\gamma_k^2} e^{\frac{(\operatorname{Im} x_k - \operatorname{Im} v_k)^2}{2\gamma_k^2}} d\lambda_1(\operatorname{Im} x_k) = \\
 & = e^{\frac{1}{2} \|v\|_{T^2H}^2} \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\gamma_k^2} \left(\frac{\sqrt{2\pi} \cdot 2\gamma_k^3}{2\gamma_k^2} + \frac{(\operatorname{Re} v_k)^2 \sqrt{2\pi}\gamma_k}{\gamma_k^2} \right) \cdot \\
 & \quad \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\gamma_k^2} \left(\frac{\sqrt{2\pi} \cdot 2\gamma_k^3}{2\gamma_k^2} + \frac{(\operatorname{Im} v_k)^2 \sqrt{2\pi}\gamma_k}{\gamma_k^2} \right) = \\
 & = e^{\frac{1}{2} \|v\|_{T^2H}^2} \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{(\operatorname{Re} v_k)^2}{\gamma_k^2} \right) \left(1 + \frac{(\operatorname{Im} v_k)^2}{\gamma_k^2} \right) < \infty \text{ nach Kopp [25]}
 \end{aligned}$$

§ 28, Satz 3, weil $v \in T^2H$ ist.

Nun differenzieren wir g nach w : Für $u \in T^2H$ mit $\|u\|_{TH} = 1$ sei $L := \mathbb{R}u$ und L_1 das orthogonale Komplement von L in $(TH)^{\mathbb{R}}$, dem TH zu Grunde liegendem reellen Raum. Dann sei $\theta: TH = L \times L_1 \rightarrow \mathbb{R} \times L_1$, $tu + y \mapsto (t, y)$. μ_L und μ_{L_1} seien die Projektionen des Maßes μ_T^1 auf L bzw. auf L_1 . Außerdem sei

$\tilde{\mu}_L$ das Bildmaß von μ_L bezüglich der Abbildung $L \rightarrow \mathbb{R}$, $tu \mapsto t$,
und $\tilde{\mu}_T^1$ das Bildmaß von μ_T^1 bezüglich θ . Weil auf Grund des

Satzes von Lebesgue-Fubini $\frac{d(\tilde{\mu}_L \times \mu_{L_1})}{d(\lambda_1 \times \mu_{L_1})}(t, y) = \frac{d\tilde{\mu}_L}{d\lambda_1}(t)$ ist,

erhält man mit Remark 2 zu Theorem 1 in § 20 und den Rechen-
regeln zu Beginn von § 13 bei Skorohod [47]

$$\begin{aligned} \tau(t, y) &:= \frac{d\tilde{\mu}_T^1}{d(\lambda_1 \times \mu_{L_1})}(t, y) = \left(\frac{d(\lambda_1 \times \mu_{L_1})}{d\tilde{\mu}_T^1}(t, y) \right)^{-1} = \\ &= \left(\frac{d\lambda_1}{d\tilde{\mu}_L}(t) \cdot \frac{d(\tilde{\mu}_L \times \mu_{L_1})}{d\tilde{\mu}_T^1}(t, y) \right)^{-1} = \frac{d\tilde{\mu}_L}{d\lambda_1}(t) \cdot \left(\frac{d(\tilde{\mu}_L \times \mu_{L_1})}{d\tilde{\mu}_T^1}(t, y) \right)^{-1} = \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} \rho_T(tu + y; \tau u) d\tau \right)^{-1} = \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{\operatorname{Re} \langle T^{-1}u, T^{-1}(tu+y) \rangle_{TH} - \frac{1}{2}\tau^2 \|T^{-1}u\|_{TH}^2} d\tau \right)^{-1} = \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\operatorname{Re} \langle u, tu+y \rangle_{T^2H}}{\|u\|_{T^2H}} - \tau \|u\|_{T^2H} \right)^2} \frac{1}{e^{\frac{1}{2} \left(\frac{\operatorname{Re} \langle u, tu+y \rangle_{T^2H}}{\|u\|_{T^2H}} \right)^2}} d\tau \right)^{-1} = \\ &= \left(\frac{\sqrt{2\pi}}{\|u\|_{T^2H}} \right)^{-1} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\operatorname{Re} \langle u, tu+y \rangle_{T^2H}}{\|u\|_{T^2H}} \right)^2} = \\ &= \frac{\|u\|_{T^2H}}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left(t \|u\|_{T^2H}^2 + \frac{\operatorname{Re} \langle u, y \rangle_{T^2H}}{\|u\|_{T^2H}} \right)^2}. \end{aligned}$$

Nun sei $h \in T^2H$ beliebig und $u := \frac{h}{\|h\|_{TH}}$. Ist p_{L_1} die
Projektion von TH auf L_1 (wobei L_1 entsprechend u wie oben
gewählt sei), so sei $[t_1(y), t_2(y)] \cdot u$ für $y \in p_{L_1}(w + B_\epsilon^1)$ jenes
Segment, welches die Kugel $w + B_\epsilon^1 \subset TH$ aus der (reellen)
Gerade $t \mapsto y + tu$ herausschneidet. Dann gilt nach dem Satz
von Lebesgue-Fubini (vgl. Dieudonné [10], 13.21.7)

$$\begin{aligned}
 g(v, w+h) - g(v, w) &= \\
 &= \int_{w+h+B_{\varepsilon}^1} f^*(x) \rho_T^1(x; v) d\mu_T^1(x) - \int_{w+B_{\varepsilon}^1} f^*(x) \rho_T^1(x; v) d\mu_T^1(x) = \\
 &= \int_{p_{L_1}(w+B_{\varepsilon}^1)}^{t_2(y) + \|h\|_{TH}} t_1(y) + \int_{\|h\|_{TH}}^{t_2(y)} f^*(tu+y) \rho_T^1(tu+y; v) \tau(t, y) dt d\mu_{L_1}(y) - \\
 &- \int_{p_{L_1}(w+B_{\varepsilon}^1)}^{t_2(y)} f^*(tu+y) \rho_T^1(tu+y; v) \tau(t, y) dt d\mu_{L_1}(y) = \\
 &= \int_{p_{L_1}(w+B_{\varepsilon}^1)} \left(\frac{t_2(y) + \|h\|_{TH}}{t_2(y)} - \frac{t_1(y) + \|h\|_{TH}}{t_1(y)} \right) f^*(tu+y) \rho_T^1(tu+y; v) \tau(t, y) dt d\mu_{L_1}(y)
 \end{aligned}$$

Nach Hilfssatz 2.5 ist f^* lokal gleichmäßig stetig. Da stetige lineare Abbildungen gleichmäßig stetig sind, und da die Abbildung $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto e^t$ lokal gleichmäßig stetig ist, ist gemäß Dieudonné [10], 3.11.9, auch $\rho_T^1(\cdot; v)$ lokal gleichmäßig stetig auf T^2H , also μ_T^1 -fast überall (vgl. Satz 1.34). Ebenso sieht man, daß τ lokal gleichmäßig stetig ist μ_T^1 -fast überall, und damit $f^*(tu+y) \rho_T^1(tu+y; v) \tau(t, y) =: \phi(t, y)$ denn Summe und Produkt gleichmäßig stetiger Funktionen sind wiederum gleichmäßig stetig.

Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung (vgl. Erwe [14] VI. Satz 20) gibt es für $i \in \{1, 2\}$ demzufolge eine TH-stetige Funktion $\eta_i: T^2H \rightarrow \mathbb{R}$, $h \mapsto \sup\{|\phi(t, y) - \phi(t_i(y), y)|; y \in p_{L_1}(w+B_{\varepsilon}^1), t \in [t_1(y), t_1(y) + \|h\|_{TH}]\}$, mit $\eta_i(0) = 0$, so daß für $i \in \{1, 2\}$ und $y \in p_{L_1}(B_{\varepsilon}^1)$ gilt

$$\begin{aligned}
 & \int_{t_i(y)}^{t_i(y) + \|h\|_{TH}} \phi(t, y) dt = \\
 & \int_{t_i(y)}^{t_i(y) + \|h\|_{TH}} \phi(t_i(y), y) dt + \int_{t_i(y)}^{t_i(y) + \|h\|_{TH}} (\phi(t, y) - \phi(t_i(y), y)) dt = \\
 & = \int_{t_i(y)}^{t_i(y) + \|h\|_{TH}} \phi(t_i(y), y) dt + \|h\|_{TH} \cdot \eta_i(h).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{Insgesamt haben wir somit erhalten } g(v, w+h) - g(v, w) = \\
 & = \|h\|_{TH} \int_{p_{L_1}(w+B_\varepsilon^1)} (f^*(t_2(y)u+y) \rho_T^1(t_2(y)u+y; v) \tau(t_2(y), y) - \\
 & \quad - f^*(t_1(y)u+y) \rho_T^1(t_1(y)u+y; v) \tau(t_1(y), y)) d\mu_{L_1}(y) + \\
 & \quad + \|h\|_{TH} \eta(h)
 \end{aligned}$$

mit einer TH-stetigen Funktion $\eta: T^2H \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\eta(0) = 0$.

Auf dieses Integral wenden wir jetzt Theorem 1 aus § 27 bei Skorohod [47] an: Für $j \in \{1, 2\}$ sei dazu $(w+S_\varepsilon^1)_j$ der Teil von $\partial(w+B_\varepsilon^1)$, welcher bezüglich der (reellen) Hyperebene L_1 auf der Seite des Vektors $(-1)^j u$ liegt. p_j sei die (injektive) Projektion $(w+S_\varepsilon^1)_j \rightarrow L_1$, $tu+y \mapsto y$. Für $x \in (w+S_\varepsilon^1)_j$ sei n_x der Normalenvektor bezüglich $(w+S_\varepsilon^1)_j$ in der Richtung, daß $\text{Re} \langle n_x, (-1)^j u \rangle_{TH} > 0$ ist. Die Funktion $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\alpha \mapsto \int_{p_j(w+S_\varepsilon^1)_j} \frac{\tau \left(\frac{\alpha}{|\langle n_{p_j^{-1}(y)}, (-1)^j u \rangle_{TH}|} + t_j(y), y \right)}{|\langle n_{p_j^{-1}(y)}, (-1)^j u \rangle_{TH}|} d\mu_{L_1}(y),$$

ist nach Dieudonné [10], 13.8.6, bei $\alpha = 0$ stetig, da der Integrand bei $\alpha = 0$ stetig und beschränkt ist für fast alle y .

Somit ist oben genanntes Theorem aus [47] anwendbar, und wir erhalten

$$\begin{aligned}
 & p_{L_1}(w+S_\varepsilon^1)_j \int f^*(t_j(y)u+y) \rho_T^1(t_j(y)u+y;v) \tau(t_j(y),y) d\mu_{L_1}(y) = \\
 & = p_{L_1}(w+S_\varepsilon^1)_j \int \frac{f^*(t_j(y)u+y) \rho_T^1(t_j(y)u+y;v) | \langle n_{t_j(y)u+y}, (-1)^j u \rangle_{TH} |}{\tau(t_j(y),y)^{-1} | \langle n_{t_j(y)u+y}, (-1)^j u \rangle_{TH} |} d\mu_{L_1}(y) \\
 & = \int_{(w+S_\varepsilon^1)_j} f^*(x) \rho_T^1(x;v) | \langle n_x, u \rangle_{TH} | d\mu_T^{(w+S_\varepsilon^1)_j}(x) = \\
 & = (-1)^j \int_{(S_\varepsilon^1)_j} f^*(x+w) \operatorname{Re} \langle n_x, u \rangle_{TH} d\mu_T^{(S_\varepsilon^1)_j}(x), \\
 & \text{wenn } d\mu_T^{(w+S_\varepsilon^1)_j} \text{ bzw. } d\mu_T^{(S_\varepsilon^1)_j} \text{ das Flächenmaß auf } (w+S_\varepsilon^1)_j \text{ bzw.} \\
 & \text{auf } (S_\varepsilon^1)_j \text{ bezüglich } \mu_T^1 \text{ ist (vgl. § 27 in [47]).}
 \end{aligned}$$

Berücksichtigt man die Gleichung $h = \|h\|_{TH} \cdot u$, so erhält man $g(v, w+h) - g(v, w) =$
 $= \int_{S_\varepsilon^1} f^*(x+w) \operatorname{Re} \langle n_x, h \rangle_{TH} d\mu_T^{S_\varepsilon^1}(x) + \|h\|_{TH} \eta(h)$ mit einer stetigen Funktion $\eta: T^2H \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\eta(0) = 0$. Daraus folgt die Gâteaux-Differenzierbarkeit von g nach w , und wegen
 $|D_w g(v, w)(h)| \leq \|h\|_{TH} \cdot \|f^*\|_{L^2(w+S_\varepsilon^1; \mu_T^1)}$ ist g nach w sogar Fréchet-differenzierbar.

Da die Differenzierbarkeit des zweiten die Funktion f^* definierenden Integrals, $I_2(z)$, wegen der Differenzierbarkeit von F aus 13.8.6 bei Dieudonné [10] folgt, bekommen wir für $z \in W \cap T^2H$ und $h \in T^2H$ als Ergebnis

$$\begin{aligned}
 (f^*)'(z)(h) = & \frac{1}{\mu_T^1(B_\varepsilon^1)} \left(\int_{B_\varepsilon^1} f^*(x+z) \operatorname{Re} \langle x, h \rangle_{T^2H} d\mu_T^1(x) + \right. \\
 & + \int_{S_\varepsilon^1} f^*(x+z) \operatorname{Re} \langle n_x, h \rangle_{TH} d\mu_T^1(x) + \\
 & \left. + 2 \int_{B_\varepsilon^1} \int_0^1 (F \circ \sigma_1)'(z+rx)(h)(x) dr d\mu_T^1(x) \right).
 \end{aligned}$$

Mit [10], 13.8.6, zeigt man unter Verwendung der Beschränktheit von f^* auf beschränkten Mengen von $W \cap T^2H$ (denn f^* ist auf $W \cap TH$ stetig, und T ist kompakt) schließlich die Stetigkeit von $(f^*)'$.

Wir nehmen jetzt an, f^* sei auf $W \cap T^{k+1}H$ k -mal stetig differenzierbar in Richtung von $T^{k+1}H$ mit der Ableitung

$$(f^*)^{(k)}(z)(h_1, \dots, h_k) =$$

$$\begin{aligned}
 = & \frac{1}{\mu_T^k(B^k)} \left\{ \int_{B_\varepsilon^k} (f^* \circ \tilde{\sigma}_k)^{(k-1)}(x+z)(h_2, \dots, h_k) \operatorname{Re} \langle x, h_1 \rangle_{T^{k+1}H} d\mu_T^k(x) + \right. \\
 & + \int_{S_\varepsilon^k} (f^* \circ \tilde{\sigma}_k)^{(k-1)}(x+z)(h_2, \dots, h_k) \operatorname{Re} \langle n_x, h_1 \rangle_{T^{k+1}H} d\mu_T^k(x) + \\
 & \left. + 2 \int_{B_\varepsilon^k} \int_0^1 (F \circ \sigma_k)^{(k)}(z+rx)(h_1, \dots, h_k)(x) dr d\mu_T^k(x) \right\}
 \end{aligned}$$

für $z \in W \cap T^{k+1}H$ und $h_1, \dots, h_k \in T^{k+1}H$. Dabei sei μ_T^k und $B_\varepsilon^k \subset T^kH$ entsprechend wie μ_T^1 und B_ε^1 definiert.

Wir zeigen nun, daß f^* auf $W \cap T^{k+2}H$ auch $(k+1)$ -mal stetig differenzierbar ist in Richtung von $T^{k+2}H$. Die Funktion f^* ist wie auf $W \cap TH$ auch auf $W \cap T^2H$ lokal gleichmäßig stetig, und führt man die Differentiationen mit $f^* \circ \tilde{\sigma}_2$ durch, so erhält man

$$\begin{aligned}
 & (f^*)^{(k)}(z)(h_1, \dots, h_k) \cdot \mu_T^{k+1}(B_\varepsilon^{k+1}) = \\
 & = \int_{B_\varepsilon^{k+1}} (f^* \circ \tilde{\sigma}_{k+1})^{(k-1)}(x+z)(h_2, \dots, h_k) \operatorname{Re} \langle x, h_1 \rangle_T^{k+2} d\mu_T^{k+1}(x) + \\
 & + \int_{S_\varepsilon^{k+1}} (f^* \circ \tilde{\sigma}_{k+1})^{(k-1)}(x+z)(h_2, \dots, h_k) \operatorname{Re} \langle n_x, h_1 \rangle_T^{k+1} d\mu_T^{S_\varepsilon^{k+1}}(x) + \\
 & + 2 \int_{B_\varepsilon^{k+1}} \int_0^1 (F \circ \sigma_{k+1})^{(k)}(z+rx)(h_1, \dots, h_k)(x) dr d\mu_T^{k+1}(x) \\
 & \text{für } z \in W \cap T^{k+2}H \text{ und } h_1, \dots, h_k \in T^{k+2}H.
 \end{aligned}$$

Weil $(f^*)^{(k-1)}$ auf $T^k H$ stetig differenzierbar ist und damit auf beschränkten Mengen von $T^{k+1}H$ beschränkt ist, können wir wiederum Dieudonné [10], 13.8.6, anwenden und erhalten

$$\begin{aligned}
 & (f^*)^{(k+1)}(z)(h_1, \dots, h_{k+1}) \cdot \mu_T^{k+1}(B_\varepsilon^{k+1}) = \\
 & = \int_{B_\varepsilon^{k+1}} (f^* \circ \tilde{\sigma}_{k+1})^{(k)}(x+z)(h_2, \dots, h_{k+1}) \operatorname{Re} \langle x, h_1 \rangle_T^{k+2} d\mu_T^{k+1}(x) + \\
 & + \int_{S_\varepsilon^{k+1}} (f^* \circ \tilde{\sigma}_{k+1})^{(k)}(x+z)(h_2, \dots, h_{k+1}) \operatorname{Re} \langle n_x, h_1 \rangle_T^{k+1} d\mu_T^{S_\varepsilon^{k+1}}(x) + \\
 & + 2 \int_{B_\varepsilon^{k+1}} \int_0^1 (F \circ \sigma_{k+1})^{(k+1)}(z+rx)(h_1, \dots, h_{k+1})(x) dr d\mu_T^{k+1}(x) \\
 & \text{für } z \in W \cap T^{k+2}H \text{ und } h_1, \dots, h_{k+1} \in T^{k+2}H.
 \end{aligned}$$

Die Stetigkeit von $(f^*)^{(k+1)}$ zeigt man analog zur Stetigkeit von $(f^*)'$.

///

In [9] zeigen Colombeau und Perrot, daß f^* auf $W \cap T^3H$ in Richtung T^4H bereits C^∞ ist. Mazet [30] hat gezeigt, daß der $\bar{\partial}$ -Operator, angewandt auf Funktionen auf Banach-Räumen, hypoelliptisch ist, d.h. man hätte ohne Hilfssatz 2.7 direkt schließen können, daß f^* eine C^∞ -Funktion ist.

Zu guter Letzt zeigen wir, daß f^* eine Lösung des $\bar{\partial}$ -Problems bezüglich $F|W \cap T^3H$ ist:

2.8 Hilfssatz (vgl. Raboin [36], Théorème 1 (iii)):

Für $x \in W \cap T^3H$ gilt $\bar{\partial}f^*(x) = F(x)$.

Beweis:

Es ist $f^* \in C^1(W \cap T^3H)$, und sowohl f^* als auch $(f^*)'$ sind auf beschränkten Mengen von $W \cap T^3H$ beschränkt. Für $z \in T^4H$ und eine Funktion $\psi \in C^1(W \cap T^3H)$ mit beschränktem Träger und beschränkter Ableitung gilt somit

$$\begin{aligned} \int_{T^3H} \bar{\partial}f^*(x)(z)\psi(x)d\mu_T^3(x) &= \\ &= \int_{T^3H} \bar{\partial}(f^* \cdot \psi)(x)(z)d\mu_T^3(x) - \int_{T^3H} f^*(x)\bar{\partial}\psi(x)(z)d\mu_T^3(x). \end{aligned}$$

Mit Definition 1.3 und Dieudonné [10], 13.8.6, erhält man weiter $\int_{T^3H} \bar{\partial}(f^* \cdot \psi)(x)(z)d\mu_T^3(x) =$

$$\begin{aligned} &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{T^3H} \frac{1}{2\alpha} \left((f^* \cdot \psi)(x + \alpha z) - (f^* \cdot \psi)(x) + i \left((f^* \cdot \psi)(x + i\alpha z) - (f^* \cdot \psi)(x) \right) \right) d\mu_T^3(x) - \\ &= \int_{T^3H} \frac{1}{2} (f^* \cdot \psi)(x) d(d_z \mu_T^3)(x) + \int_{T^3H} \frac{i}{2} (f^* \cdot \psi)(x) d(d_{iz} \mu_T^3)(x), \text{ wobei} \\ &d_z \mu_T^3 \text{ die Ableitung des Maßes } \mu_T^3 \text{ in Richtung } z \text{ sei, vgl.} \end{aligned}$$

Skorohod [47], § 21.

Mit [47], § 22, und der Bemerkung nach Definition 1.33

$$\begin{aligned}
 & \text{erhält man } \frac{d(d\mu_T^3)}{d\mu_T^3}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} l_n(x; z) \text{ mit } l_n(x; z) := \\
 & = \frac{d}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} \log \prod_{k=1}^n \frac{1}{2\pi\gamma_k} e^{-\frac{(\operatorname{Re} x_k - \alpha \operatorname{Re} z_k)^2}{2\gamma_k^2} - \frac{(\operatorname{Im} x_k - \alpha \operatorname{Im} z_k)^2}{2\gamma_k^2}} = \\
 & = \sum_{k=1}^n \frac{\operatorname{Re} x_k \cdot \operatorname{Re} z_k + \operatorname{Im} x_k \cdot \operatorname{Im} z_k}{\gamma_k^2}, \text{ weil } \int_{T^3H} |\operatorname{Re} \langle x, z \rangle_{T^4H}| d\mu_T^3(x) = \\
 & = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma_k^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\operatorname{Re} x_k \cdot \operatorname{Re} z_k}{\gamma_k^2} \right| e^{-\frac{(\operatorname{Re} x_k)^2}{2\gamma_k^2}} d\lambda_1(\operatorname{Re} x_k) \cdot \\
 & \quad \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma_k^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\operatorname{Im} x_k \cdot \operatorname{Im} z_k}{\gamma_k^2} \right| e^{-\frac{(\operatorname{Im} x_k)^2}{2\gamma_k^2}} d\lambda_1(\operatorname{Im} x_k) \leq \\
 & \leq \|z\|_{T^4H} \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma_k^2}} \cdot \frac{2}{\gamma_k} \gamma_k^2 \right)^2 = \|z\|_{T^4H} \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} < \infty.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{Somit gilt } \int_{T^3H} \delta(f * \psi)(x)(z) d\mu_T^3(x) = \\
 & = \int_{T^3H} \frac{1}{2} (f * \psi)(x) \operatorname{Re} \langle x, z \rangle_{T^4H} d\mu_T^3(x) + \frac{i}{2} \int_{T^3H} (f * \psi)(x) \operatorname{Re} \langle x, iz \rangle_{T^4H} d\mu_T^3(x) = \\
 & = \frac{1}{2} \int_{T^3H} (f * \psi)(x) \cdot \langle x, z \rangle_{T^4H} d\mu_T^3(x), \text{ und wir erhalten}
 \end{aligned}$$

$$\int_{T^3H} \delta f * (x)(z) \psi(x) d\mu_T^3(x) = - \int_{T^3H} f * (x) \delta \psi(x)(z) d\mu_T^3(x) \text{ mit}$$

$$\delta \psi(x)(z) := \delta \psi(x)(z) - \frac{1}{2} \langle x, z \rangle_{T^4H} \psi(x). \text{ Ebenso erhält man}$$

$$\int_{T^3H} \delta f_n(x)(z) \psi(x) d\mu_T^3(x) = - \int_{T^3H} f_n(x) \delta \psi(x)(z) d\mu_T^3(x).$$

Weil $\delta \psi(\cdot; z) \in L^2(W \wedge T^3H; \mu_T^3)$ ist, da der Träger von ψ in T^3H beschränkt ist, und weil f_n in $L^2(W \wedge T^3H; \mu_T^3)$ schwach gegen f^* konvergiert, konvergiert $\int_{T^3H} f_n(x) \delta \psi(x)(z) d\mu_T^3(x)$

gegen $\int_{T^3H} f^*(x) \delta \psi(x)(z) d\mu_T^3(x)$. Weiter konvergiert δf_n punktweise gegen F , und δf_n ist auf beschränkten Mengen von T^3H beschränkt. Somit konvergiert $\int_{T^3H} \delta f_n(x)(z) \psi(x) d\mu_T^3(x)$ gegen $\int_{T^3H} F(x)(z) \psi(x) d\mu_T^3(x)$, und wir erhalten

$$\int_{T^3H} \delta f(x)(z) \psi(x) d\mu_T^3(x) = \int_{T^3H} F(x)(z) \psi(x) d\mu_T^3(x).$$

Daraus folgt die Behauptung. ///

Mit diesem Hilfssatz haben wir schließlich den Beweis von Satz 2.2 beendet, und wir können uns dem Beweis von Theorem 2.1 zuwenden:

Beweis von Theorem 2.1:

Es sei F eine δ -geschlossene $C^\infty(0,1)$ -Differentialform auf Ω . Nach Satz 2.2 gibt es für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ eine Funktion $\tilde{f}_n \in C^n(K_n)$ (in H_n) mit $\delta f_n = F \circ \pi_n|_{K_n}$.

Wir definieren jetzt $f_1 := \tilde{f}_1 \in C^1(K_1)$ in H_1 und nehmen an, daß für eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ und $2 \leq i \leq n$ bereits Funktionen $f_i \in C^i(K_i)$ in H_i definiert sind, so daß gilt $\delta f_i = F \circ \pi_i|_{K_i}$ und $\|f_i - f_{i-1}\|_{K_{i-1}} < 2^{-i}$. Dann definieren wir $f_{n+1} := \tilde{f}_{n+1} + g_n$, wobei $g_n \in \mathcal{O}(\Omega \wedge H_{n+1})$ sei mit $\|g_n - (f_n - \tilde{f}_{n+1})\|_{K_n} < 2^{-(n+1)}$. Eine solche Funktion g_n existiert nach Hilfssatz 2.9, da $f_n - \tilde{f}_{n+1}|_{K_n} \in \mathcal{O}(K_n)$ in H_n ist. Somit gilt $f_{n+1} \in C^{n+1}(K_{n+1})$ in H_{n+1} , $\delta f_{n+1} = F \circ \pi_{n+1}|_{K_{n+1}}$ und $\|f_{n+1} - f_n\|_{K_n} = \|\tilde{f}_{n+1} + g_n - f_n\|_{K_n} < 2^{-(n+1)}$.

Jetzt sei $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$.

Diese Funktion f ist wohldefiniert und stetig auf jedem Kompaktum $K \subset \Omega$: Ist nämlich $K \subset \Omega$ kompakt, so gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $K \subset K_n$, und $f|_K$ ist als gleichmäßiger Grenzwert der beschränkten stetigen Funktionen $f_k \circ \pi_{n,k}|_K$ ($k \geq n$) stetig (vgl. Dieudonné [10], 7.2.1). Da E ein k -Raum ist (vgl. Satz 1.27), ist somit f stetig. Weiter hat $f|_K$ die Darstellung $f|_K = f_m|_K + \sum_{k=m}^{\infty} (f_{k+1} \circ \pi_{m,k+1} - f_k \circ \pi_{m,k})|_K$ für $m \geq n$, wobei die unendliche Summe holomorpher Funktionen nach dem Satz von Vitali (vgl. Noverraz [31], Théorème 1.2.14) holomorph ist. Somit ist $f|_K \in C^\infty(K)$, und es gilt $\bar{\partial} f|_K = \bar{\partial} f_n|_K = F \circ \pi_n|_K$. Das gilt für ein beliebiges Kompaktum $K \subset \Omega$, und somit ist $f \in C^\infty(\Omega)$ mit $\bar{\partial} f = F$. ///

Schließlich fehlt uns zum Beweis der Lösbarkeit des $\bar{\partial}$ -Problems noch Hilfssatz 2.9, ein Satz vom Oka-Weil-Typ:

2.9 Hilfssatz:

Es seien $H_1 \subset H_2$ Hilbert-Räume, $p_n^i: H_1 \rightarrow H_1$ Projektionen mit $\dim_{\mathbb{C}} p_n^i H_1 = n$ für $i \in \{1, 2\}$ und $p_n^1 x = p_n^2 x$ für $x \in H_1$ und $n \in \mathbb{N}$. Weiter sei $\Omega \subset H_2$ pseudokonvex und $K = \hat{K}_0(\Omega \wedge H_1) \subset \Omega \wedge H_1$ kompakt. Dann gibt es zu jeder holomorphen Funktion $f \in O(K)$ (in H_1) und zu jedem $\varepsilon > 0$ eine holomorphe Funktion $g \in O(\Omega)$ mit $\|f - g\|_K < \varepsilon$.

Der Beweis dieses Hilfssatzes verläuft wie bei Schottensloher [42], 4.5:

Beweis:

Es sei $U \subset \Omega \cap H_1$ eine offene Umgebung von K und $f \in O(U)$.

Nach Aussage (*) im Beweis von [42], 4.5, gibt es eine natürliche Zahl $n_1 \in \mathbb{N}$, so daß $(p_n^1 K)_{O(\Omega \cap p_n^1 H_1)}$ für $n \geq n_1$ in $\Omega \cap p_n^1 H_1$ kompakt enthalten ist.

Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig. Da $f \circ p_n^1|_K$ für $n \rightarrow \infty$ gleichmäßig gegen $f|_K$ konvergiert, gibt es eine natürliche Zahl $n_2 \in \mathbb{N}$, so daß $\|f \circ p_n^1 - f\|_K < \frac{\varepsilon}{3}$ gilt für $n \geq n_2$. Nach dem (endlich-dimensionalen) Satz von Oka-Weil (vgl. Hörmander [21], 7.2.7) gibt es eine holomorphe Funktion $h \in O(\Omega \cap p_n^1 H_1)$ mit $\|h - f\|_{p_n^1 K} < \frac{\varepsilon}{3}$ für $n := \max\{n_1, n_2\}$, und nach [42], 3.8, gibt es eine holomorphe Funktion $g \in O(\Omega)$ mit $\|g - h \circ p_n^2\|_K < \frac{\varepsilon}{3}$.

$$\begin{aligned} & \text{Für } n := \max\{n_1, n_2\} \text{ gilt somit } \|f - g\|_K \leq \\ & \leq \|f - f \circ p_n^1\|_K + \|f \circ p_n^1 - h \circ p_n^1\|_K + \|h \circ p_n^1 - g\|_K = \\ & = \|f - f \circ p_n^1\|_K + \|f - h\|_{p_n^1 K} + \|h \circ p_n^2 - g\|_K < \varepsilon. \end{aligned} \quad ///$$

Das Fehlen eines solchen Approximationssatzes für $\bar{\partial}$ -geschlossene $(0, q)$ -Differentialformen stellt ein Haupthinderungsgrund dar für den Beweis der Existenz einer Lösung ω der Gleichung $\bar{\partial}\omega = F$ zu einer beliebig vorgegebenen $\bar{\partial}$ -geschlossenen C^∞ - $(0, q+1)$ -Differentialform F auf Ω .

Nachdem wir Theorem 2.1 vollständig bewiesen haben, können wir eine wichtige Folgerung daraus ziehen.

2.10 Satz:

Ist E ein $\mathcal{DFN}$ -Raum und $\Omega \subset E$ ein pseudokonvexes Gebiet, so gilt $H^1(\Omega, \mathcal{O}^N) = 0$ für $N \in \mathbb{N}$.

Beweis:

Es genügt, den Satz für $N=1$ zu zeigen, denn dann folgt der allgemeine Fall sofort aus der Gleichung $H^1(\Omega, \mathcal{O}^N) \cong \cong (H^1(\Omega, \mathcal{O}))^N$, vgl. Andreian Cazacu [1], II. § 7, Satz 9.

Es sei $\mathcal{U} := (U_i)_{i \in I}$ eine (da Ω parakompakt ist, vgl. Satz 1.27, o.E. lokal-endliche) offene Überdeckung von Ω und $\alpha = (\alpha_{ij})_{i,j \in I}$ ein 1-Kozyklus. Da E ein Lindelöf-Schwartz-Raum ist, vgl. wiederum Satz 1.27, gibt es nach Lloyd [28], 3.7 (i), eine $\mathcal{U}$ untergeordnete C^∞ -Zerlegung der Einheit, und C^∞ , die Garbe der Keime unendlich oft stetig differenzierbarer Funktionen auf Ω , ist eine feine Garbe. Daraus folgt insbesondere $H^1(\Omega, C^\infty) = 0$, vgl. Andreian Cazacu [1], II. § 8, Theorem 14, und damit auch $H^1(\mathcal{U}, C^\infty) = 0$, vgl. [1], II. § 7 Bemerkung 5.

Deshalb ist α bezüglich der Garbe C^∞ ein 1-Korand, d.h. es gibt eine 0-Kokette $\beta = (\beta_i)_{i \in I}$, $\beta_i \in C^\infty(U_i)$, mit $\delta\beta = \alpha$, d.h. $\beta_i - \beta_j = \alpha_{ji}$ in $U_i \cap U_j$. Da α_{ji} holomorph ist, folgt daraus $\bar{\partial}\beta_i = \bar{\partial}\beta_j$ auf $U_i \cap U_j$, und durch $F|_{U_i} := \bar{\partial}\beta_i$ wird eindeutig eine C^∞ -(0,1)-Differentialform F auf Ω definiert. Jetzt gibt es nach Theorem 2.1 eine C^∞ -Funktion $f \in C^\infty(\Omega)$ mit $\bar{\partial}f = -F$. Definieren wir nun $\gamma_i := \beta_i + f|_{U_i}$, so ist

$\gamma := (\gamma_i)_{i \in I}$ eine 0-Kokette, es gilt $\gamma_i - \gamma_j = \beta_i - \beta_j = \alpha_{ji}$ auf $U_i \cap U_j$, d.h. $\delta\gamma = \alpha$, und $\bar{\partial}\gamma_i = \bar{\partial}\beta_i + \bar{\partial}f|_{U_i} = 0$, d.h. $\gamma \in C^0(\mathcal{U}, 0)$.

Somit ist $H^1(\mathcal{U}, 0) = 0$ für eine beliebige Überdeckung $\mathcal{U}$ von Ω , und deshalb gilt $H^1(\Omega, 0) = 0$. ///

Als Korollar zu diesem Satz erhalten wir Lösungen des Cousin-I- und des Cousin-II-Problems:

2.11 Korollar:

Ist E ein $\mathcal{DFN}$ -Raum und $\Omega \subset E$ ein pseudokonvexes Gebiet, so ist das Cousin-I-Problem lösbar, d.h. zu einer offenen Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von Ω und meromorphen Funktionen $f_i \in \mathcal{M}(U_i)$ mit $(f_i - f_j)|_{U_i \cap U_j} \in \mathcal{O}(U_i \cap U_j)$ gibt es eine meromorphe Funktion $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ mit $f|_{U_i} - f_i \in \mathcal{O}(U_i)$ für $i \in I$.

Beweis:

Aus der Exaktheit der Sequenz $0 \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}/\mathcal{O} \rightarrow 0$ folgt mit Andreian Cazacu [1], II. § 8 Theorem 11, die Exaktheit der Sequenz $0 \rightarrow \Gamma(\Omega, \mathcal{O}) \rightarrow \Gamma(\Omega, \mathcal{M}) \rightarrow \Gamma(\Omega, \mathcal{M}/\mathcal{O}) \rightarrow H^1(\Omega, \mathcal{O})$, weil Ω parakompakt ist, vgl. Satz 1.27. Da nach Satz 2.10 $H^1(\Omega, \mathcal{O}) = 0$ ist, folgt die Behauptung aus [1], IV. § 1 Bemerkung 1. ///

2.12 Korollar:

Ist E ein $\mathcal{DFN}$ -Raum und $\Omega \subset E$ ein pseudokonvexes Gebiet mit $H^2(\Omega, \mathbb{Z}) = 0$, so ist das Cousin-II-Problem lösbar,

d.h. zu einer offenen Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von Ω und meromorphen Funktionen $f_i \in \mathcal{M}^*(U_i)$ mit $\frac{f_i}{f_j} \Big|_{U_i \cap U_j} \in \mathcal{O}^*(U_i \cap U_j)$ gibt es eine meromorphe Funktion $f \in \mathcal{M}^*(\Omega)$ mit $\frac{f|_{U_i}}{f_i} \in \mathcal{O}^*(U_i)$ für $i \in I$.

Beweis:

Es sei $\mathcal{D} := \mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*$ die Garbe der Divisoren auf Ω . Aus der Exaktheit der Garbensequenz $0 \rightarrow \mathcal{O}^* \rightarrow \mathcal{M}^* \rightarrow \mathcal{D} \rightarrow 0$ folgt wiederum die Exaktheit der Sequenz $\Gamma(\Omega, \mathcal{M}^*) \rightarrow \Gamma(\Omega, \mathcal{D}) \rightarrow H^1(\Omega, \mathcal{O}^*)$, und es muß nur gezeigt werden, daß $H^1(\Omega, \mathcal{O}^*) = 0$ ist.

Dazu betrachten wir die exakte Garbensequenz $0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{\exp(2\pi i \cdot)} \mathcal{O}^* \rightarrow 0$. Daraus folgert man die Exaktheit der Sequenz $H^1(\Omega, \mathcal{O}) \rightarrow H^1(\Omega, \mathcal{O}^*) \rightarrow H^2(\Omega, \mathbb{Z})$. Wegen $H^1(\Omega, \mathcal{O}) = H^2(\Omega, \mathbb{Z}) = 0$ muß dann aber auch $H^1(\Omega, \mathcal{O}^*) = 0$ sein.

///

Da wir nicht wissen, ob $H^2(\Omega, \mathcal{O}) = 0$ ist für pseudokonvexe Gebiete Ω eines $\mathcal{DFN}$ -Raumes, können wir die Notwendigkeit der Bedingung $H^2(\Omega, \mathbb{Z}) = 0$ für die Lösbarkeit des Cousin-II-Problems nicht beweisen.

K A P I T E L 3

Das Cartansche Heftungslemma für Silva-Räume mit Basis

In Kapitel 2 haben wir gesehen (Satz 2.10), daß die erste Kohomologiegruppe einer vom Rang N freien $\mathcal{O}$ -Modul-Garbe verschwindet. Um dieses auch für vom Rang N lokal-freie Garben zu zeigen, benötigen wir als wesentliches Hilfsmittel das Cartansche Heftungslemma.

Wir zeigen es hier für einen Silva-Raum E mit Schauder-Basis, wobei wir uns eng an den Beweis im endlich-dimensionalen Fall halten (vgl. Gunning-Rossi [17], VI E 7). Da E jedoch nicht lokal-kompakt ist, erhalten wir die gesuchte Produktdarstellung nur auf den E definierenden Banach-Räumen. In Kapitel 6 werden wir dann jedoch sehen, daß diese schwache Form des Cartanschen Heftungslemmas zur Anwendung ausreichen wird.

In diesem Kapitel sei E ein komplexer Silva-Raum mit Schauder-Basis $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$, und E habe die Darstellung als induktiver Limes der Banach-Räume $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit injektiven kompakten Verbindungshomomorphismen $\pi_{nm}: B_n \rightarrow B_m$ (für $n \leq m$) und $\pi_n: B_n \rightarrow E$. Ein Komplementärraum von $\mathbb{C}e_1$ bezüglich E , versehen mit der durch E induzierten Silva-Raum-Topologie, werde mit $\tilde{E}$ bezeichnet. Wir nehmen an, daß e_1 in jedem B_n enthalten ist und definieren $\tilde{B}_n := B_n \cap \tilde{E}$.

Im Folgenden seien $a_1 < a_2 \leq a_3 < a_4$ und $b_1 < b_2$ reelle Zahlen, $K'_1 := \{x+iy \in \mathbb{C}; a_1 \leq x \leq a_3, b_1 \leq y \leq b_2\}$, $K''_1 := \{x+iy \in \mathbb{C}; a_2 \leq x \leq a_4, b_1 \leq y \leq b_2\}$ und $K_1 := K'_1 \cap K''_1 = \{x+iy \in \mathbb{C}; a_2 \leq x \leq a_3, b_1 \leq y \leq b_2\}$. Mit einer kompakten konvexen Menge $\tilde{K} \subset \tilde{E}$ sei $K' := K'_1 \times \tilde{K}$, $K'' := K''_1 \times \tilde{K}$ und $K := K' \cap K'' = K_1 \times \tilde{K}$. Entsprechend Satz 1.23 sei $n_0 \in \mathbb{N}$ so gewählt, daß $K' \cup K'' \cup \{e_1\}$ in B_{n_0} kompakt enthalten ist.

Für eine natürliche Zahl $N \in \mathbb{N}$ sei $\mathbb{C}^{N \times N}$ die Menge der komplexen $N \times N$ -Matrizen, versehen mit der durch die Norm $\| \cdot \| : \mathbb{C}^{N \times N} \rightarrow \mathbb{R}, A \mapsto \sup\{|Ax|; x \in \mathbb{C}^N \text{ mit } \|x\| = 1\}$ definierten Topologie. Für eine Matrix $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq N} \in \mathbb{C}^{N \times N}$ gilt $|a_{ij}| \leq \|A\| \leq N \cdot \sup\{|a_{ij}|; 1 \leq i, j \leq N\}$ (vgl. Ungleichung (2) in Andreian Cazacu [1], II. § 10), d.h. diese Norm auf $\mathbb{C}^{N \times N} \cong \mathbb{C}^{N^2}$ und die Supremumsnorm (und damit auch die euklidische Norm) auf $\mathbb{C}^{N^2}$ sind äquivalent.

Ist $A \in \mathbb{C}^{N \times N}$, so sei $\exp(A) := \sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{v!} A^v$ und $\log(A) := - \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v} (I_N - A)^v$, wobei I_N die Einheitsmatrix in $\mathbb{C}^{N \times N}$ sei. Nach Lemma 1 wird bei Gunning-Rossi [17], VI. E gezeigt, daß $\exp$ eine stetige Abbildung von $\mathbb{C}^{N \times N}$ nach der Menge $GL(N; \mathbb{C})$ der invertierbaren $N \times N$ -Matrizen ist, daß $\log(A)$ existiert, wenn $\|I_N - A\| < 1$ ist, und daß dann gilt $A = \exp(\log(A))$. Ebenso sieht man dort mit Hilfe des Satzes von Vitali (vgl. Noverraz [31], Théorème 1.2.14), daß für holomorphe Abbildungen $f: E \supset U \rightarrow \mathbb{C}^{N \times N}$ auch die Abbildungen $\exp \circ f$ und $\log \circ f$ holomorph sind, soweit sie existieren.

Nun formulieren wir das Cartansche Heftungslemma (vgl. Gunning-Rossi [17], VI E Theorem 7) für Silva-Räume mit Schauder-Basis:

3.1 Satz:

Es sei E ein Silva-Raum mit Schauder-Basis und K, K', K'' und n_0 wie oben definiert. Für $n \geq n_0$ und eine holomorphe Abbildung $f: K \rightarrow GL(N; \mathbb{C})$ gibt es in B_n holomorphe Abbildungen $f': K' \rightarrow GL(N; \mathbb{C})$ und $f'': K'' \rightarrow GL(N; \mathbb{C})$, so daß gilt $f(z) = f'(z) \cdot f''(z)$ für $z \in K$.

Beweis:

Es sei eine holomorphe Abbildung $f: K \rightarrow GL(N; \mathbb{C})$ gegeben. Bei Dieudonné [10], 8.3.2, sieht man, daß mit f auch $f^{(-1)}: K \rightarrow GL(N; \mathbb{C})$, $z \mapsto f(z)^{-1}$ holomorph und damit stetig bzw. lokal beschränkt ist (vgl. Noverraz [31], 1.2.5), d.h. es gibt eine offene, nach Hilfssatz 3.3 o.E. pseudokonvexe Umgebung U von K und eine Konstante $C > 0$, so daß $f(z)$ existiert und $\|f(z)^{-1}\| < C$ ist für $z \in U$.

Nach Lemma 3.2 gibt es ein $\delta > 0$ und eine offene konvexe Umgebung $\tilde{U} \subset \tilde{E}^-$ von $\tilde{K}$, so daß mit $K_1(\delta) := \{z \in \mathbb{C}; \inf_{w \in K_1} |z-w| < \delta\}$ gilt $K \subset K_1(\delta) \times \tilde{U} \subset U$. Für $n \geq n_0$ sei $\tilde{W}_n \subset \tilde{B}_n$ eine beschränkte offene konvexe Umgebung von $\tilde{K}$ mit $\overline{\tilde{W}_n} \subset \tilde{U} \cap \tilde{B}_n$. Schließlich sei $U_k^n := K_1(\frac{\delta}{3} + 2^{-k}\delta) \times \tilde{W}_n$ definiert für $n \geq n_0$ und $k \in \mathbb{N}$ und analog $(U_k^n)' := K_1'(\frac{\delta}{3} + 2^{-k}\delta) \times \tilde{W}_n$ und $(U_k^n)'' := K_1''(\frac{\delta}{3} + 2^{-k}\delta) \times \tilde{W}_n$.

Nach [17] VI E, Lemma 5, gibt es eine Konstante $P > 0$, so daß für beliebige $N \times N$ -Matrizen A, B, C mit $\|A\| \leq \frac{1}{2}$, $\|B\| \leq \frac{1}{2}$ und $(I_N + A)(I_N + C)(I_N + B) = I_N + A + B$ gilt $\|C\| \leq P \cdot \|A\| \cdot \|B\|$. Ist L die Länge der glatten Randkurve von $K_1(\delta)$, so wählen wir eine positive reelle Zahl ρ mit $\rho < \min\{1, \frac{\pi\delta}{LN}, \frac{\pi^2\delta^2}{4L^2N^2P}\}$.

Wir betrachten jetzt ein festes $n \geq n_0$. Vorläufig nehmen wir an, daß $\|I_N - f(z)\| < \frac{\rho}{4}$ gilt für $z \in \overline{U_1^n}$. Induktiv definieren wir nun holomorphe Abbildungen g_k, g_k' und g_k'' , die folgenden Bedingungen gehorchen:

- a) $g_1(z) = f(z) - I_N$ für $z \in U$.
- b) $g_k: \overline{U_k^n} \rightarrow \mathbb{C}^{N \times N}$ ist holomorph und $\|g_k(z)\| \leq \frac{\rho}{4^k}$ für $z \in \overline{U_k^n}$.
- c) $g_k': (\overline{U_k^n})' \rightarrow \mathbb{C}^{N \times N}$ ist holomorph, und es gilt $\|g_k'(z)\| \leq \frac{LN\rho}{2^k \pi \delta}$ für $z \in (\overline{U_{k+1}^n})'$. Analoges gelte für g_k'' .
- d) $g_k(z) = g_k'(z) + g_k''(z)$ für $z \in U_k^n$.
- e) $(I_N + g_k'(z))(I_N + g_{k+1}(z))(I_N + g_k''(z)) = I_N + g_k(z)$ für $z \in \overline{U_{k+1}^n}$.

Definieren wir g_1 anhand a), so erfüllt g_1 Bedingung b). Es sei nun für $k \in \mathbb{N}$ eine Abbildung g_k gegeben, welche Bedingung b) erfüllt. Ist γ die glatte Randkurve von $K_1(\frac{\delta}{3} + 2^{-k}\delta)$, hineinprojiziert in die e_1 -Ebene von B_n , so ist ihre Länge kleiner als L , die Länge von $\partial K_1(\delta)$. Wir definieren $\gamma = \gamma' \cup \gamma''$ mit $\gamma' := \{x+iy \in \gamma; x \geq \frac{a_2+a_3}{2}\}$ und $\gamma'' := \{x+iy \in \gamma; x \leq \frac{a_2+a_3}{2}\}$.

Nun sei $g'_k: (U_k^n)' \rightarrow \mathbb{C}^{N \times N}$ komponentenweise definiert durch $(g'_k(\sum_{i \in \mathbb{N}} \zeta_i e_i))_{\mu\nu} := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{t-\zeta_1} (g_k(t e_1 + \sum_{i>1} \zeta_i e_i))_{\mu\nu} dt$ für $z = \sum_{i \in \mathbb{N}} \zeta_i e_i \in (U_k^n)'$ und $1 \leq \mu, \nu \leq N$. Dann ist g'_k komponentenweise Gâteaux-analytisch und stetig (vgl. Dieudonné [10], 13.8.6), also eine holomorphe Abbildung. Ist entsprechend $g''_k: (U_k^n)'' \rightarrow \mathbb{C}^{N \times N}$ definiert, so erhalten wir $(g'_k(z) + g''_k(z))_{\mu\nu} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{t-\zeta_1} (g_k(t + \sum_{i>1} \zeta_i e_i))_{\mu\nu} dt = (g_k(z))_{\mu\nu}$ für $z = \sum_{i \in \mathbb{N}} \zeta_i e_i \in U_k^n = (U_k^n)' \cap (U_k^n)''$ und $1 \leq \mu, \nu \leq N$ nach der Cauchy-schen Integralformal (vgl. Hörmander [21], 1.2.1), und es gilt Bedingung d).

g'_k (und analog g''_k) erfüllt auch Bedingung c): Für $z = \sum_{i \in \mathbb{N}} \zeta_i e_i \in \overline{(U_{k+1}^n)'}'$ und $t \in \gamma'$ gilt $|t-\zeta_1| \geq 2^{-(k+1)}\delta$. Damit erhalten wir $|(g'_k(z))_{\mu\nu}| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2^{k+1}}{\delta} \cdot \frac{\rho}{4} \cdot L = \frac{\rho L}{2^k \pi \delta}$ und somit $\|g'(z)\| \leq \frac{LN\rho}{2^k \pi \delta}$ für $z \in \overline{(U_{k+1}^n)'}'$.

Wegen der Wahl von ρ gilt $\|g'_k(z)\| \leq \frac{LN}{2^k \pi \delta} \cdot \frac{\pi \delta}{LN} = \frac{1}{2^k} \leq \frac{1}{2}$ für $z \in \overline{(U_{k+1}^n)'}' \supset \overline{U_{k+1}^n}$ und analog $\|g''_k(z)\| \leq \frac{1}{2}$ für $z \in \overline{(U_{k+1}^n)''} \supset \overline{U_{k+1}^n}$. Daraus folgt (vgl. Dieudonné [10], 8.3.2.1), daß $I_N + g'_k(z)$ und $I_N + g''_k(z)$ invertierbar sind für z aus einer Umgebung von $\overline{U_{k+1}^n}$, und wir können durch $g_{k+1}(z) := (I_N + g'_k(z))^{-1} (I_N + g_k(z)) (I_N + g''_k(z))^{-1} - I_N$ eine

holomorphe Abbildung $\overline{U_{k+1}^n} \rightarrow \mathbb{C}^{N \times N}$ definieren, welche die Bedingungen e) und b) erfüllt, denn wegen [17] VI E 5 und Bedingung c) gilt $\|g_{k+1}(z)\| \leq P \left(\frac{LN\rho}{2^k \pi \delta} \right)^2 = \frac{\rho}{4^{k+1}} \cdot \rho \cdot \frac{4PL^2 N^2}{\pi^2 \delta^2} < \frac{\rho}{4^{k+1}}$ für $z \in \overline{U_{k+1}^n}$ nach Wahl von ρ .

Nun definieren wir $f_k: \overline{U_k^n} \rightarrow GL(N; \mathbb{C})$, $z \mapsto I_N + g_k(z)$ und analog $f'_k: (\overline{U_{k+1}^n})' \rightarrow GL(N; \mathbb{C})$ und $f''_k: (\overline{U_{k+1}^n})'' \rightarrow GL(N; \mathbb{C})$. f_k , f'_k und f''_k sind wohldefinierte holomorphe Abbildungen, und wegen Bedingung e) gilt $f'_k(z)f_{k+1}(z)f''_k(z) = f_k(z)$ für $z \in \overline{U_{k+1}^n}$. Diese Formel mehrmals angewandt, ergibt

$$f(z) = f_1(z) = \prod_{i=1}^k f'_i(z) \cdot f_{k+1}(z) \cdot \prod_{i=1}^k f''_{k+1-i}(z) \text{ für } z \in \overline{U_{k+1}^n}$$

Aus Bedingung c) und Lemma 3.4 folgt, daß es eine holomorphe Abbildung $f': K_1(\frac{\delta}{3}) \times \tilde{W}_n \rightarrow GL(N; \mathbb{C})$ gibt mit

$$f'(z) = \lim_{k \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^k f'_i(z). \text{ Analog existiert auch die holomorphe}$$

$$\text{Abbildung } f'': K_1(\frac{\delta}{3}) \times \tilde{W}_n \rightarrow GL(N; \mathbb{C}) \text{ mit } f''(z) = \lim_{k \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^k f''_{k+1-i}(z).$$

Aus Bedingung b) folgt, daß $g_k(z)$ gegen 0 konvergiert für $z \in K$ und $k \rightarrow \infty$, und beim Grenzübergang $k \rightarrow \infty$ erhalten wir $f(z) = f'(z) \cdot f''(z) = f'(z)f''(z)$ für $z \in K$ und $n \geq n_0$.

Nun betrachten wir den allgemeinen Fall, d.h. f erfüllt nicht die Bedingung $\|I_N - f(z)\| < \frac{\rho}{4}$ für $z \in \overline{U_1^n}$. Nach Hilfssatz 3.5 gibt es eine holomorphe Abbildung $h: E \rightarrow GL(N; \mathbb{C})$ mit $\|f(z) - h(z)\| < \frac{\rho}{4C}$ für $z \in \overline{U_1^n}$ (denn $\overline{U_1^n}$ ist in B_n beschränkt, also in E relativ-kompakt; außerdem ist $K_1(\delta) \times \tilde{U} \subset E$ (pseudo-)konvex, d.h. es gilt $\hat{\overline{U_1^n}} \subset K_1(\delta) \times \tilde{U} \subset U$).

Damit gilt $\| I_N - f(z)^{-1} h(z) \| \leq \| f(z)^{-1} \| \cdot \| f(z) - h(z) \| < C \cdot \frac{\rho}{4C} = \frac{\rho}{4}$ für $z \in \overline{U_1^n}$, und nach dem ersten Teil des Beweises, angewandt auf $f^{(-1)} \cdot h$, gibt es holomorphe Abbildungen $h': K_1'(\frac{\delta}{3}) \times \tilde{W}_n \rightarrow GL(N; \mathbb{C})$ und $h'': K_1''(\frac{\delta}{3}) \times \tilde{W}_n \rightarrow GL(N; \mathbb{C})$ mit $f(z)^{-1} h(z) = h''(z) h'(z)$ für $z \in K$. Definieren wir $f': K_1'(\frac{\delta}{3}) \times \tilde{W}_n \rightarrow GL(N; \mathbb{C})$, $z \mapsto h(z) h'(z)^{-1}$ und $f'': K_1''(\frac{\delta}{3}) \times \tilde{W}_n \rightarrow GL(N; \mathbb{C})$, $z \mapsto h''(z)^{-1}$, so sind beide Abbildungen holomorph, und es gilt $f(z) = h(z) \cdot h'(z) \cdot h''(z) = f'(z) \cdot f''(z)$ für $z \in K$. ///

Zur Vervollständigung dieses Beweises verbleibt noch der Beweis der verwendeten Hilfssätze. Wir beginnen mit einem etwas technischen Lemma:

3.2 Lemma:

Es sei $U \subsetneq E$ eine offene pseudokonvexe Umgebung von K . Dann gibt es ein $\delta > 0$ und eine offene konvexe Umgebung $\tilde{U} \subset \tilde{E}$ von $\tilde{K}$, so daß $\{z \in \mathbb{C}; \inf_{w \in K_1} |z - w| < \delta\} \times \tilde{U}$ in U enthalten ist.

Beweis:

Für $\varepsilon > 0$ sei $K_1(\varepsilon) := \{z \in \mathbb{C}; \inf_{w \in K_1} |z - w| < \varepsilon\}$. Dann ist $\{\varepsilon > 0; K_1(\varepsilon) \times \tilde{K} \subset U\} \neq \emptyset$. Somit existiert $\delta := \frac{1}{2} \sup\{\varepsilon > 0; K_1(\varepsilon) \times \tilde{K} \subset U\}$, und es gilt $\overline{K_1(\delta)} \times \tilde{K} \subset U$.

E ist nach Satz 1.27 a) ein Lindelöf-Raum, d.h. es gibt eine gröbere Topologie τ_d auf E , welche durch eine Metrik d definiert wird, und bezüglich welcher U offen ist. $\overline{K_1(\delta)} \times \tilde{K} \subset E$ ist kompakt und damit auch kompakt bezüglich τ_d . Deshalb ist

$\gamma := \frac{1}{2}d(\overline{K_1(\delta)} \times \tilde{K}, \partial_d U) > 0$ (wobei $\partial_d U$ der Rand von U bezüglich τ_d sei). Dann ist $\tilde{V} := \{x \in \tilde{E}; d(x, \tilde{K}) < \gamma\}$ offen, und es gilt $\overline{K \subset K_1(\delta) \times \tilde{V}} \subset U$. Ist $\tilde{U}$ eine Nullumgebungsbasis von $\tilde{E}$, so ist $\tilde{K} + \tilde{U}$ eine Umgebungsbasis von $\tilde{K}$ (vgl. Roelcke [39], 8.17). Somit gibt es eine offene konvexe Menge $\tilde{U}'$ mit $\tilde{K} + \tilde{U}' \subset \tilde{V}$, und $\tilde{U} := \tilde{K} + \tilde{U}'$ ist offen und konvex (vgl. Köthe [26] §16, 1. (3)), und es gilt $\overline{K_1(\delta) \times \tilde{U}} \subset U$. ///

Es folgt ein wichtiger Hilfssatz, den wir auch später noch benötigen werden:

3.3 Hilfssatz:

Es sei $\Omega \subset E$ ein pseudokonvexes Gebiet, $K \subset \Omega$ kompakt und $O(\Omega)$ -konvex und $U \subset \Omega$ eine offene Umgebung von K . Dann besitzt K auch eine pseudokonvexe Umgebung $W \subset U$.

Beweis:

Es sei $p_n: E \rightarrow E$, $\sum_{i \in \mathbb{N}} \xi_i e_i \mapsto \sum_{i=1}^n \xi_i e_i$ die Projektion auf die ersten n Komponenten bezüglich der Schauder-Basis $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ und $E_n := p_n E$. Weiter sei $pr_n: E \rightarrow \mathbb{C}$, $\sum_{i \in \mathbb{N}} \xi_i e_i \mapsto \xi_n$.

Nach dem Beweis zu Lemma 3.2 gibt es eine (gröbere) Topologie τ_d auf E , welche durch eine Metrik d definiert wird, und bezüglich welcher U offen ist. Da K auch bezüglich τ_d kompakt ist, gibt es ein $\epsilon > 0$, so daß $B_E^{(E, \tau_d)}(x) \subset U$ ist für alle $x \in K$.

Sei nun $V := \bigcup_{x \in K} B_{\varepsilon/3}^{(E, \tau_d)}(x) \subset U$. V ist offen in E .

Es gibt ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $p_n K \subset V \cap E_n$ für $n \geq n_1$. Sonst gäbe es nämlich eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und natürliche Zahlen $k_n \geq n$ mit $x_n \in p_{k_n} K \setminus (V \cap E_{k_n}) \subset (\bigcap_{i \in \mathbb{N}} p_i K) \setminus V$. Da $(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} p_i K) \setminus V \subset E$ (folgen-)kompakt ist, besitzt $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ einen Häufungswert $x \in (\bigcap_{i \in \mathbb{N}} p_i K) \setminus V$. Wegen der Definition der Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gilt $p_{k_n} x \in p_{k_n} K$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und somit $x \in K$, was ein Widerspruch ist zu $x \notin V$.

Schließlich gibt es ein $n_2 \geq n_1$, so daß $\widehat{p_n K}_{0(\Omega \cap E_n)} \subset V \cap E_n$ ist für $n \geq n_2$, siehe (*) im Beweis von 4.5 bei Schottenloher [42].

Die Abbildungen $p_n|_K$ konvergieren gegen id_K , insbesondere konvergieren sie gleichmäßig in der größeren Topologie τ_d . Somit gibt es ein $n_3 \geq n_2$, so daß $d(x, p_n x) < \frac{\varepsilon}{3}$ gilt für $x \in K$ und $n \geq n_3$.

Für $n \geq n_3$ gibt es nun nach der endlich-dimensionalen Theorie (vgl. Hörmander [21], 2.6.11) eine pseudokonvexe Umgebung $W_n \subset V \cap E_n$ von $\widehat{p_n K}_{0(\Omega \cap E_n)}$. Jetzt definieren wir $W := p_n^{-1}(W_n) \cap \{d(x, p_n x) < \frac{\varepsilon}{3}\}$. Nach Lemma 2.1.5 und den folgenden Beispielen bei Noverraz [31] ist W pseudokonvex. Außerdem ist $K \subset W$ und schließlich $W \subset U$. Für $x \in W$ ist nämlich $p_n x \in W_n \subset V$ und für beliebiges $y \in K$ gilt $d(x, y) \leq d(x, p_n x) + d(p_n x, y) < \varepsilon$ nach Definition von V und W . Somit ist $x \in U$ nach Definition von ε . ///

Es folgt ein Lemma über unendliche Produkte matrixwertiger Abbildungen. Der erste Teil des Beweises ist eine Übertragung von Gunning-Rossi [17], VI E 4, auf den Fall, daß die matrixwertigen Abbildungen auf Banach-Räumen definiert sind, während der zweite Teil des Beweises identisch ist mit [17], VI E 4, und deshalb hier nur zitiert wird.

3.4 Lemma:

Es sei $U \subset B_n$ offen und $(a_v)_{v \in \mathbb{N}}$ eine Folge positiver reeller Zahlen, so daß $\sum_{v \in \mathbb{N}} a_v < \infty$ ist. Ist dann $(f_v)_{v \in \mathbb{N}}$ eine Folge holomorpher Abbildungen $U \rightarrow \mathbb{C}^{N \times N}$ mit $\|f_v(z)\| < a_v$ für $z \in U$ und $v \in \mathbb{N}$, so konvergiert die Folge von Abbildungen $(z \mapsto \prod_{v=1}^k (I_N + f_v(z)))_{k \in \mathbb{N}}$ gegen eine holomorphe Abbildung $p: U \rightarrow \mathbb{C}^{N \times N}$.

Ist $I_N + f_v(z) \in GL(N; \mathbb{C})$ für alle $v \in \mathbb{N}$, so ist auch $p(z) \in GL(N; \mathbb{C})$.

Beweis:

Es sei $p_k: U \rightarrow \mathbb{C}^{N \times N}$, $z \mapsto \prod_{v=1}^k (I_N + f_v(z))$. Dann gilt $\|p_k(z)\| \leq \prod_{v=1}^k \|I_N + f_v(z)\| \leq \prod_{v=1}^k (1 + a_v)$ für $z \in U$. Da $\sum_{v \in \mathbb{N}} a_v < \infty$ ist, konvergiert nach Knopp [25], § 28, Satz 3, die Folge $\left(\prod_{v=1}^k (1 + a_v) \right)_{k \in \mathbb{N}}$ gegen eine positive reelle Zahl a , d.h. $\|p_k(z)\| \leq a$ für $z \in U$ und $k \in \mathbb{N}$. Somit gilt $\|p_{k+1}(z) - p_k(z)\| = \|p_k(z)(I_N + f_{k+1}(z)) - p_k(z) \cdot I_N\| \leq \|p_k(z)\| \cdot \|f_{k+1}(z)\| < a \cdot a_{k+1}$ für $z \in U$. Folglich ist $(p_k(z))_{k \in \mathbb{N}}$ eine gleichmäßige

Cauchy-Folge auf U , und da $\mathbb{C}^{N \times N}$ folgenvollständig ist, konvergiert $p_k(z)$ gegen eine Matrix $p(z)$. Schließlich ist nach dem Satz von Vitali (vgl. Noverraz [31], 1.2.14) die Abbildung $p: U \rightarrow \mathbb{C}^{N \times N}$, $z \mapsto p(z)$ holomorph.

Daß $p(z) \in GL(N; \mathbb{C})$ ist, wenn $I_N + f_v(z) \in GL(N; \mathbb{C})$ ist für alle $v \in \mathbb{N}$, folgt aus dem zweiten Teil des Beweises von Gunning-Rossi [17], VI E 4. ///

Bemerkung:

Lemma 3.4 gilt selbstverständlich analog auch für die Folge von Abbildungen $(z \mapsto \prod_{v=1}^k f_{k+1-v}(z))_{k \in \mathbb{N}}$.

Nun müssen wir noch folgenden Approximationssatz beweisen, vgl. Gunning-Rossi [17], VI E 3:

3.5 Hilfssatz:

Es sei $K \subset E$ holomorph-konvex und kompakt, U eine konvexe Umgebung von K und $f: U \rightarrow GL(N; \mathbb{C})$ eine holomorphe Abbildung. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine holomorphe Abbildung $g: E \rightarrow GL(N; \mathbb{C})$ mit $\|f(z) - g(z)\| < \varepsilon$ für $z \in K$.

Zum Beweis dieses Hilfssatzes benötigen wir folgendes Lemma, vgl. Gunning-Rossi [17], VI E 2:

3.6 Lemma:

Es sei $\emptyset \neq K \subset E$ kompakt und U eine offene konvexe Umgebung von K . Für jede holomorphe Abbildung $f: U \rightarrow GL(N; \mathbb{C})$

gibt es dann holomorphe Abbildungen $f_1, \dots, f_r: U \rightarrow GL(N; \mathbb{C})$
mit $f = \prod_{i=1}^r f_i$ und $\|I_N - f_i(z)\| < 1$ für $1 \leq i \leq r$ und $z \in U$.

Beweis von Lemma 3.6:

Die Gruppe G aller holomorphen Abbildungen $U \rightarrow GL(N; \mathbb{C})$,
versehen mit der Halbnorm $\|\cdot\|_K: g \mapsto \sup_{z \in K} \|g(z)\|$, wird
zur topologischen Gruppe, da für $A, B \in GL(N; \mathbb{C})$ gilt
 $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.

G ist zusammenhängend: Dazu genügt es zu zeigen (Satz 62
bei Grottemeyer [16]), daß G wegzusammenhängend ist. Für $z_0 \in K$
und beliebiges $g \in G$ ist $\phi_g: [0, 1] \rightarrow G$, $t \mapsto g_t$ mit
 $g_t(z) := g(z_0 + t(z - z_0))$ wohldefiniert und stetig, definiert
also einen Weg, der g mit der konstanten Abbildung $z \mapsto g(z_0)$
verbindet. Aus dem Wegzusammenhang von $GL(N; \mathbb{C})$ (vgl. Andreian
Cazacu [1], II. § 10, Theorem 1') folgt dann, daß G weg-
zusammenhängend ist.

Nach Pontrjagin [34], III § 22, Satz 14, wird eine
zusammenhängende topologische Gruppe von einer beliebigen
Umgebung des Einselementes erzeugt. $U := \{f \in G; \|e - f\|_K < 1\}$
ist eine Umgebung des Einselementes $e: z \mapsto I_N$ in G , und
somit kann jede Funktion $f \in G$ geschrieben werden als Produkt
 $f = \prod_{i=1}^r f_i$ mit $f_1, \dots, f_r \in U$. ///

Nun können wir Hilfssatz 3.5 beweisen:

Beweis von Hilfssatz 3.5:

Gemäß Lemma 3.6 können wir schreiben $f = \prod_{i=1}^r f_i$ mit

holomorphen Abbildungen $f: U \rightarrow GL(N; \mathbb{C})$, so daß gilt

$$\| I_N - f_i(z) \| < 1 \text{ für } 1 \leq i \leq r \text{ und } z \in U.$$

Für $1 \leq i \leq r$ und $z \in U$ existiert dann $h_i(z) := \log f_i(z)$, und es gilt $f_i(z) = \exp(h_i(z))$ mit der holomorphen Abbildung $h_i: U \rightarrow \mathbb{C}^{N \times N}$ (siehe den Anfang dieses Kapitels).

Nach dem Satz von Oka-Weil (vgl. Schottenloher [42], 4.5)

gibt es für $\delta > 0$ holomorphe Funktionen $\tilde{g}_{ikl}: E \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$|(h_i(z))_{kl} - \tilde{g}_{ikl}(z)| < \frac{\delta}{N} \text{ für } z \in K, 1 \leq i \leq r \text{ und } 1 \leq k, l \leq N.$$

Die Funktionen $\tilde{g}_{ikl}$ definieren matrixwertige Abbildungen

$$\tilde{g}_i: E \rightarrow \mathbb{C}^{N \times N}, \text{ und es gilt } \| h_i(z) - \tilde{g}_i(z) \| < \delta \text{ für } z \in K.$$

Wir wählen ein $M > 0$, so daß gilt $\| f_i(z) \| < M-1$ für $1 \leq i \leq r$ und $z \in K$. Es ist $\exp: \mathbb{C}^{N \times N} \rightarrow GL(N; \mathbb{C})$ eine stetige Abbildung, also gleichmäßig stetig auf $\{A \in \mathbb{C}^{N \times N}; \|A\| \leq M\}$, und daher gibt es für $0 < \varepsilon < rM^{r-1}$ ein $0 < \delta < 1$ mit

$$\| \exp(A) - \exp(B) \| < \frac{\varepsilon}{rM^{r-1}} \text{ für } N \times N\text{-Matrizen } A, B \text{ mit } \|A\| < M,$$

$$\|B\| < M \text{ und } \|A - B\| < \delta. \text{ Wählen wir entsprechend diesem } \delta$$

matrixwertige Abbildungen $\tilde{g}_i$ wie oben, so sei

$$g_i := \exp \circ \tilde{g}_i: E \rightarrow GL(N; \mathbb{C}). \text{ Dann gilt}$$

$$\| f_i(z) - g_i(z) \| = \| \exp(h_i(z)) - \exp(\tilde{g}_i(z)) \| < \frac{\varepsilon}{rM^{r-1}} \text{ für } z \in K.$$

Die Abbildung g_i ist holomorph, und für $z \in K$ erhält man

$$\| g_i(z) \| \leq \| g_i(z) - f_i(z) \| + \| f_i(z) \| < 1 + M - 1 = M.$$

Nun definieren wir die holomorphe Abbildung

$$\begin{aligned}
 g &:= \prod_{i=1}^r g_i : E \rightarrow GL(N; \mathbb{C}) \text{ und erhalten } \| f(z) - g(z) \| = \\
 &= \left\| \prod_{i=1}^r f_i(z) - \prod_{i=1}^r g_i(z) \right\| \leq \\
 &\leq \sum_{k=1}^r \left\| \prod_{i=1}^k f_i(z) \prod_{j=k+1}^r g_j(z) - \prod_{i=1}^{k-1} f_i(z) \prod_{j=k}^r g_j(z) \right\| \leq \\
 &\leq \sum_{k=1}^r \left\| \prod_{i=1}^{k-1} f_i(z) \prod_{j=k+1}^r g_j(z) \right\| \cdot \| f_k(z) - g_k(z) \| < r M^{r-1} \cdot \frac{\epsilon}{r M^{r-1}} = \epsilon
 \end{aligned}$$

für $z \in K$.

///

K A P I T E L 4

Ein hinreichendes Kriterium für das Verschwinden der ersten Kohomologiegruppe einer $\mathcal{O}$ -Modul-Garbe über einem pseudo-konvexen Gebiet eines Silva-Raumes mit Basis

In diesem Kapitel wollen wir die zentrale Aussage dieser Arbeit beweisen: Theorem 4.1 gibt ein hinreichendes Kriterium dafür an, daß die erste Kohomologiegruppe einer $\mathcal{O}$ -Modul-Garbe $\mathcal{F}$ über einem pseudokonvexen Gebiet Ω eines Silva-Raumes E mit Schauder-Basis verschwindet.

Auch in diesem Kapitel sei $E = \varinjlim B_n$ ein komplexer Silva-Raum mit Schauder-Basis $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ und injektiven kompakten Verbindungshomomorphismen $\pi_{nm}: B_n \rightarrow B_m$ (für $n \leq m$) und $\pi_n: B_n \rightarrow E$ mit Banach-Räumen B_n .

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\mathcal{O}_n$ die Garbe der auf B_n holomorphen Funktionskeime. Für eine offene Teilmenge $U \subset E$ und $f \in \mathcal{O}(U)$ identifizieren wir $f|_{B_n}$ mit $f \circ \pi_n|_U \in \mathcal{O}_n(U \cap B_n)$. Für eine $\mathcal{O}$ -Modul-Garbe $\mathcal{F}$ sei $\mathcal{F}_n := \mathcal{O}_n \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{F}|_{B_n}$ die durch Skalaren-erweiterung entstandene $\mathcal{O}_n$ -Modul-Garbe auf B_n . Für $n \leq m$ sei $\rho_{nm}: \mathcal{F}_m|_{B_n} = \mathcal{O}_m|_{B_n} \otimes \mathcal{F}|_{B_n} \rightarrow \mathcal{O}_n \otimes \mathcal{F}|_{B_n} = \mathcal{F}_n$ definiert durch $\rho_{nm}(g_x \otimes f_x) := (g \circ \pi_{nm})_x \otimes f_x$ für $x \in B_n$. Dabei sei g ein Repräsentant von $g_x \in (\mathcal{O}_m)_x$. Analog dazu sei $\rho_n: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_n$ definiert für $n \in \mathbb{N}$. Die $\mathcal{O}$ -Modul-Garbe $\mathcal{F}$ besitze die Eigenschaft (+), wenn es zu einer offenen Menge $U \subset E$ und einer Folge $f_n \in \mathcal{F}_n(U \cap B_n)$ mit $f_n = \rho_{nm} \circ f_m \circ \pi_{nm}|_U$ für $n \leq m$ einen Schnitt

$f \in \mathcal{F}(U)$ gibt mit $f_n = \rho_n \circ f_n \circ \pi_n|_U$ für $n \in \mathbb{N}$. In Zukunft schreiben wir $f_m|_{B_n}: U \cap B_n \rightarrow \mathcal{F}_n$ statt $\rho_{nm} \circ f_m \circ \pi_{nm}|_U$ für $n \leq m$ und einen Schnitt $f_m \in \Gamma(U \cap B_m, \mathcal{F}_m)$.

Eine kompakte Ausschöpfung $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ einer Menge $U \subset E$ habe genau dann die Eigenschaft (*), wenn es für $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl $k(n)$ und eine offene Menge $U_n \subset B_{k(n)}$ gibt mit $K_n \subset U_n \subset K_{n+1}$.

4.1 Theorem:

$\mathcal{F}$ sei eine $\mathcal{O}$ -Modul-Garbe mit der Eigenschaft (+) über dem pseudokonvexen Gebiet $\Omega \subset E$. Es gebe eine zulässige Ausschöpfungsfolge $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Ω mit der Eigenschaft (*) durch kompakte holomorph-konvexe Mengen, so daß für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

- a) $H^1(K_n, \mathcal{F}) = 0$ und
- b) es gibt eine natürliche Zahl $N_n \in \mathbb{N}$ und einen Epimorphismus $\phi_n: \Gamma(K_n, \mathcal{O}^{N_n}) \rightarrow \Gamma(K_n, \mathcal{F})$, der für $m \leq n$ einen Epimorphismus $\phi_n^m: \Gamma(K_m, \mathcal{O}^{N_n}) \rightarrow \Gamma(K_m, \mathcal{F})$ mit $\phi_n^m(c|_{K_m}) = \phi_n(c)|_{K_m}$ für $c \in \Gamma(K_n, \mathcal{O}^{N_n})$ induziert.

Dann gilt $H^1(\Omega, \mathcal{F}) = 0$.

4.2 Bemerkungen:

- a) Nach Satz 1.24 besitzen $\mathcal{O}$ und $\mathcal{O}^N$ (für $N \in \mathbb{N}$) die Eigenschaft (+). Ebenso besitzt die Idealgarbe I_A einer analytischen Menge $A \subset U$ in einer offenen Menge $U \subset E$ die Eigenschaft (+).

b) Ist $\Omega \subset E$ ein pseudokonvexes Gebiet, so gibt es eine zulässige Ausschöpfungsfolge $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Ω durch kompakte holomorph-konvexe Mengen $K_1 \subset K_2 \subset \dots$, so daß o.E. $K_n \subset B_n$ kompakt ist (vgl. Satz 1.26 und Satz 1.30). Nun kann man eine beschränkte offene Umgebung $U_n \subset B_n$ von K_n wählen, so daß $K_{n+1} \cap \pi_{n,n+1} U_n \subset \Omega \cap B_{n+1}$ kompakt ist. Ersetzen wir notfalls K_{n+1} durch $K_{n+1} \cap \pi_{n,n+1} U_n$, so gilt $K_n \subset U_n \subset K_{n+1}$, d.h. es gibt eine zulässige Ausschöpfungsfolge $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Ω mit der Eigenschaft (*) durch kompakte holomorph-konvexe Mengen.

Wir kommen nun zum Beweis von Theorem 4.1:

Beweis von Theorem 4.1:

$(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei eine Ausschöpfung von Ω mit den im Theorem angegebenen Eigenschaften. O.E. sei $K_n \subset B_n$ kompakt und $U_n \subset B_n$ eine beschränkte offene Umgebung von K_n mit $K_n \subset U_n \subset K_{n+1}$.

Für natürliche Zahlen $m \leq n$ definieren wir nun Seminormen $\|\cdot\|_n^m$ auf $\Gamma(K_m, \mathcal{F})$ mit $\|\cdot\|_n^m \leq \|\cdot\|_n^{m+1} \leq \|\cdot\|_{n+1}^{m+1}$ auf $\Gamma(K_{m+1}, \mathcal{F})$ für $m < n$: Der Epimorphismus ϕ_n führt die kanonischen Schnitte $\phi_1, \dots, \phi_{N_n}$ in $\Gamma(K_n, \mathcal{O}^N)$ über in Schnitte $\psi_1^n, \dots, \psi_{N_n}^n$, welche $\Gamma(K_n, \mathcal{F})$ erzeugen. Wir definieren vorerst Seminormen $|||\cdot|||_n^m$ auf $\Gamma(K_m, \mathcal{F})$ durch

$$|||\cdot|||_n^m := \inf \{ \|\cdot\|_{K_m} ; c \in (\phi_n^m)^{-1}(f) \}$$

mit $\|c\|_{K_m} := \max\{\|c_j\|_{K_m}; 1 \leq j \leq N_n\}$ für

$c := (c_1, \dots, c_{N_n}) \in \Gamma(K_m, O^{N_n})$. Analog Andreian Cazacu [1],

VI § 3, Satz 2, sind für $m \leq n$ die Seminormen $||| \cdot |||_n^m$ und $||| \cdot |||_{n+1}^m$ auf $\Gamma(K_m, \mathcal{F})$ äquivalent, und es gibt eine Konstante $k_{n+1} \in \mathbb{R}$, so daß $||| \cdot |||_n^m \leq k_{n+1} \cdot ||| \cdot |||_{n+1}^m$ gilt für $m \leq n$.

Definiert man $|| \cdot ||_n^m := \prod_{i=1}^n k_i \cdot ||| \cdot |||_n^m$ für natürliche Zahlen $m \leq n$, so gilt $|| \cdot ||_n^m \leq || \cdot ||_{n+1}^m$. Daß $|| \cdot ||_n^m \leq || \cdot ||_n^{m+1}$ gilt für $m < n$, folgt aus der Ungleichung $\|c\|_{K_m} \leq \|c\|_{K_{m+1}}$ für $c \in \Gamma(K_{m+1}, O^{N_n})$. Mit $\psi_j^n := \prod_{i=1}^n k_i \psi_j^n$ für $1 \leq j \leq N_n$ gilt dann $\|f\|_n^m = \inf\{\|(c_1, \dots, c_{N_n})\|_{K_m}; f = \sum_{j=1}^{N_n} c_j \psi_j^n\}$.

Sei nun V eine beliebige offene Überdeckung von Ω und $\alpha \in Z^1(V, \mathcal{F})$ ein beliebiger 1-Kozyklus. Da $H^1(K_n, \mathcal{F}) = 0$ ist für $n \in \mathbb{N}$, gilt auch $H^1(V \cap K_n, \mathcal{F}) = 0$ (vgl. Andreian Cazacu [1], II § 7, Bemerkung 5), wobei $V \cap K_n := (V_i \cap K_n)_{i \in I}$ sei für $V = (V_i)_{i \in I}$. Somit gibt es eine 0-Kokette $\beta_n' \in C^0(V \cap K_n, \mathcal{F})$ mit $\delta \beta_n' = \alpha|_{K_n}$.

Wir definieren nun induktiv 0-Koketten $\beta_n \in C^0(V \cap K_n, \mathcal{F})$ mit $\delta \beta_n = \alpha|_{K_n}$ und $\|\beta_n - \beta_{n-1}\|_{n-1}^{n-1} < 2^{-n}$. Dazu sei $\beta_1 := \beta_1'$. Sind $\beta_1, \dots, \beta_n$ bereits entsprechend definiert, so sei $t_n := \beta_{n+1}' - \beta_n \in \Gamma(K_n, \mathcal{F})$. Nach Satz 4.3 gibt es einen Schnitt $g_{n+1} \in \Gamma(\Omega, \mathcal{F})$ mit $\|t_n - g_{n+1}\|_n < 2^{-(n+1)}$. Definieren wir $\beta_{n+1} := \beta_{n+1}' - g_{n+1}|_{K_{n+1}}$, so ist $\beta_{n+1} \in C^0(V \cap K_{n+1}, \mathcal{F})$, und es gilt $\delta \beta_{n+1} = \delta \beta_{n+1}' = \alpha|_{K_{n+1}}$ sowie $\|\beta_{n+1} - \beta_n\|_n = \|\beta_{n+1}' - g_{n+1} - \beta_n\|_n = \|t_n - g_{n+1}\|_n < 2^{-(n+1)}$.

Schließlich folgt aus Satz 4.6, daß es eine 0-Kokette $\beta \in C^0(V, \mathcal{F})$ gibt mit $(\beta - \beta_{n+2})|_{K_n} \in \Gamma(K_n, \mathcal{F}_{n+1})$ für $n \in \mathbb{N}$ und somit $\delta\beta|_{K_n} = \delta\beta_{n+2}|_{K_n} = \alpha|_{K_n}$, d.h. es gilt $\delta\beta = \alpha$.

Damit ist $H^1(V, \mathcal{F}) = 0$ für eine beliebige offene Überdeckung V von Ω , und deshalb gilt $H^1(\Omega, \mathcal{F}) = 0$. ///

Zur Vervollständigung des Beweises von Theorem 4.1 benötigen wir noch die Beweise zweier Sätze. Dazu seien weiterhin K_n und U_n wie am Beginn des Beweises von 4.1 angegeben, und für $m \leq n$ seien $\|\cdot\|_n^m$ die Seminormen auf $\Gamma(K_m, \mathcal{F})$ wie im Beweis des Theorems definiert; sie werden durch die Schnitte $\psi_1^n, \dots, \psi_{N_n}^n$ induziert.

Wir beginnen jetzt mit folgendem Approximationssatz:

4.3 Satz:

Es sei $f \in \Gamma(K_n, \mathcal{F})$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es einen Schnitt $g \in \Gamma(\Omega, \mathcal{F})$ mit $\|g - f\|_n^n < \varepsilon$.

Zum Beweis dieses Approximationssatzes, der wie bei Andreian Cazacu [1], VI § 4, Theorem 1, verläuft, benötigen wir noch folgendes "Summations-Lemma" 4.4, wobei wir uns an [1], VI § 3, Theorem 2, anlehnen. Da E jedoch nicht lokal-kompakt ist, d.h. jede kompakte Teilmenge von E ein leeres Inneres hat, zwingt uns dabei dieses Lemma zum Umweg über die E definierenden Banach-Räume.

4.4 Lemma:

Für $k \in \mathbb{N}$ sei $f_k \in \Gamma(K_{n+2}, \mathcal{F})$ mit $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_{n+2}^{n+2} < \infty$.

Dann hat die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f_k|_{K_{n+1}}$ eine Summe in $\Gamma(K_{n+1}, \mathcal{F}_{n+1})$, welche auf K_n eindeutig bestimmt ist.

Beweis:

Für $k \in \mathbb{N}$ sei $c^k := (c_1^k, \dots, c_{N_{n+2}}^k) \in \Gamma(K_{n+2}, \mathcal{O}_{n+2}^{n+2})$

so gewählt, daß $f_k = \sum_{j=1}^{N_{n+2}} c_j^k \psi_j^{n+2}$ ist und $\|c^k\|_{K_{n+2}} < 2 \|f_k\|_{n+2}^{n+2}$

gilt. Dann ist $\sum_{k=1}^{\infty} \|c^k\|_{K_{n+2}} < \infty$, d.h. $\sum_{k=1}^{\infty} c_j^k$ konvergiert

gleichmäßig auf K_{n+2} für $1 \leq j \leq N_{n+2}$. Folglich gibt es

für $1 \leq j \leq N_{n+2}$ eine Funktion $c_j \in \Gamma(U_{n+1}, \mathcal{O}_{n+1})$ mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_j^k|_{U_{n+1}} = c_j.$$

Mit $f := \sum_{j=1}^{N_{n+2}} c_j \psi_j^{n+2}|_{U_{n+1}}$ gilt dann $f \in \Gamma(U_{n+1}, \mathcal{F}_{n+1})$,

und $\|f - \sum_{k=1}^v f_k\|_{n+2}^{n+1}$ konvergiert gegen 0 für $v \rightarrow \infty$. Dabei

wurde ψ_j^{n+2} mit $1 \otimes \psi_j^{n+2}$ identifiziert, wobei 1 der 1-Schnitt

in $\mathcal{O}_{n+1}$ sei, und die Seminormen bezüglich der Schnitte

in $\mathcal{F}_{n+1}$ wurden analog denen in $\mathcal{F}$ definiert. Somit konvergiert

$\sum_{k=1}^v f_k$ gegen f in der $\|\cdot\|_{n+2}^{n+1}$ -Topologie auf $\Gamma(K_{n+1}, \mathcal{F}_{n+1})$

und wegen der Äquivalenz der Seminormen $\|\cdot\|_{n+2}^{n+1}$ und

$\|\cdot\|_m^{n+1}$ (für $m \geq n+1$) allgemein in jeder $\|\cdot\|_m^k$ -Topologie

für $k \leq n+1$ und $m \geq k$.

Die Eindeutigkeit der Summe auf K_n folgt schließlich aus Lemma 4.5:

///

4.5 Lemma:

Es sei $f \in \Gamma(K_{n+1}, \mathcal{F}_{n+1})$ mit $\|f\|_{n+2}^{n+1} = 0$. Dann gilt $f|_{K_n} \equiv 0$.

Beweis:

Es sei $c := (c_1, \dots, c_{N_{n+1}}) \in \Gamma(K_{n+1}, \mathcal{O}_{n+1}^{N_{n+1}})$ beliebig mit $f = \sum_{j=1}^{N_{n+1}} c_j \psi_j^{n+1}$. Es gilt $\|f\|_{n+1}^{n+1} \leq \|f\|_{n+2}^{n+1} = 0$, und somit gibt es für $k \in \mathbb{N}$ Schnitte

$c^k := (c_1^k, \dots, c_{N_{n+1}}^k) \in \Gamma(K_{n+1}, \mathcal{O}_{n+1}^{N_{n+1}})$ mit $f = \sum_{j=1}^{N_{n+1}} c_j^k \psi_j^{n+1}$ und $\|c^k\|_{K_{n+1}} < \frac{1}{k}$.

Sei nun $\gamma^k := c - c^k \in \Gamma(K_{n+1}, \mathcal{O}_{n+1}^{N_{n+1}})$. Dann ist γ^k ein Schnitt in der Relationengarbe $\mathcal{R} := \mathcal{R}(\psi_1^{n+1}, \dots, \psi_{N_{n+1}}^{n+1}) \subset \mathcal{O}_{n+1}^{N_{n+1}}$, und für $k \rightarrow \infty$ konvergiert γ^k gegen c .

Nach Satz 1.29 kann man o.E. annehmen, daß B_n eine Schauder-Basis $(b_i)_{i \in \mathbb{N}}$ besitzt. Ist $p_m: B_n \rightarrow B_n$,

$\sum_{i \in \mathbb{N}} \xi_i b_i \mapsto \sum_{i=1}^m \xi_i b_i$ die Projektion in B_n auf die ersten m Koordinaten und $B_n^m := p_m B_n$, so sei

$\mathcal{R}^m := \mathcal{R}(\psi_1^{n+1}|_{B_n^m}, \dots, \psi_{N_{n+1}}^{n+1}|_{B_n^m}) \subset \mathcal{O}_{B_n^m}^{N_{n+1}}$. Für $x \in U_n \cap B_n^m$ gilt dann $\gamma_x^k \in \mathcal{R}_x^m$, und $\gamma^k|_{U_n \cap B_n^m}$ konvergiert gleichmäßig gegen $c|_{U_n \cap B_n^m}$.

Nach Andreian Cazacu [1], I § 13, Theorem 5, ist $\mathcal{R}_x^m \subset (0_{B_n^{m+1}})_x$ abgeschlossen und deshalb $c_x \in \mathcal{R}_x^m$. Folglich ist $f|_{U_n \cap B_n^m} \equiv 0$ für beliebiges $m \in \mathbb{N}$, und deshalb gilt $f|_{U_n} \equiv 0$, da $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} B_n^m$ dicht liegt in B_n und f stetig ist. ///

Nun kommen wir zum Beweis von Satz 4.3:

Beweis von Satz 4.3:

Es sei $g_{n-2} := f := \sum_{j=1}^{N_{n+1}} c_j \psi_j^{n+1} |_{K_n}$ mit $c_j \in \Gamma(K_n, 0)$.

Nach dem Satz von Oka-Weil (vgl. Schottenloher [42], 4.5)

gibt es Funktionen $\tilde{c}_j \in \Gamma(\Omega, 0)$ mit $\|c_j - \tilde{c}_j\|_{K_n} < \frac{\varepsilon}{2}$ für

$j \in \{1, \dots, N_{n+1}\}$. Definieren wir $g_{n-1} := \sum_{j=1}^{N_{n+1}} \tilde{c}_j \psi_j^{n+1} \in \Gamma(K_{n+1}, \mathcal{F})$,

so gilt $\|g_{n-1} - g_{n-2}\|_{n+1} < \frac{\varepsilon}{2}$. Entsprechend fortfahrend

definieren wir Schnitte $g_k \in \Gamma(K_{k+2}, \mathcal{F})$ mit

$\|g_{k+1} - g_k\|_{k+3}^{k+2} < 2^{-(k+3-n)} \varepsilon$ für $k \geq n-1$. Damit gilt

$$\sum_{k=n-2}^{\infty} \|g_{k+1} - g_k\|_n \leq \sum_{k=n-2}^{\infty} \|g_{k+1} - g_k\|_{k+3}^{k+2} < \varepsilon.$$

Aus Lemma 4.4 folgt nun, daß $g_m + \sum_{k=m}^{\infty} (g_{k+1} - g_k) |_{K_{m+1}}$

für $m \geq n$ gegen einen Schnitt $g_m' \in \Gamma(K_{m+1}, \mathcal{F}_{m+1})$ konvergiert, und daß diese Summe auf K_m eindeutig bestimmt ist.

Mit Hilfe dieser Schnitte definieren wir für $m \geq n+2$

Schnitte $\tilde{g}_m \in \Gamma(\Omega \cap B_{m+1}, \mathcal{F}_{m+1})$ durch $\tilde{g}_m(x) := g_k'(x)$

($:= g_{m+1, k+1} \circ g_k' \circ \pi_{m+1, k+1}(x)$) für $x \in K_k \cap B_{m+1}$ und $k > m$.

Diese Abbildung ist wohldefiniert, denn für $x \in K_k \cap B_{m+1}$ gilt

$$\begin{aligned} g'_{k+1}(x) &= \rho_{m+1,k+2} \circ g'_{k+1} \circ \pi_{m+1,k+2}(x) = \\ &= \rho_{m+1,k+1} \circ \rho_{k+1,k+2} \circ g'_{k+1} \circ \pi_{k+1,k+2} \circ \pi_{m+1,k+1}(x) = \\ &= \rho_{m+1,k+1} \circ g'_k \circ \pi_{m+1,k+1}(x) = g'_k(x) \text{ wegen der Eindeutigkeit} \\ &\text{auf } K_k \text{ der } g'_k \text{ und } g'_{k+1} \text{ definierenden Teleskopsumme.} \end{aligned}$$

Insbesondere gilt $\tilde{g}_m = \tilde{g}_p|_{B_m}$ für $m \leq p$, und wegen der Eigenschaft (+) von $\mathcal{F}$ gibt es einen Schnitt $g \in \Gamma(\Omega, \mathcal{F})$ mit $g|_{B_m} = \tilde{g}_m$ für $m \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \text{Schließlich gilt } \|g-f\|_n^n &\leq \|g-f\|_{n+1}^n = \|g'_n - g_{n-2}\|_{n+1}^n \leq \\ &\leq \|g'_n - g_n\|_{n+1}^n + \|g_n - g_{n-1}\|_{n+1}^n + \|g_{n-1} - g_{n-2}\|_{n+1}^n \leq \\ &\leq \sum_{k=n-2}^{\infty} \|g_{k+1} - g_k\|_{k+3}^{k+2} < \varepsilon. \end{aligned} \quad ///$$

Schließlich fehlt uns noch folgender Satz zum vollständigen Beweis von Theorem 4.1:

4.6 Satz:

Es sei V eine offene Überdeckung von Ω . Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\beta_n \in C^0(V \cap K_n, \mathcal{F})$ mit $\beta_{n+1}|_{K_n} - \beta_n =: s_n \in \Gamma(K_n, \mathcal{F})$, und es gelte $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|s_n\|_n^n < \infty$. Dann gibt es eine Kokette $\beta \in C^0(V, \mathcal{F})$ mit $(\beta - \beta_{n+2})|_{K_n} \in \Gamma(K_n, \mathcal{F}_{n+1})$.

Beweis:

Nach Lemma 4.4 gibt es für $n \in \mathbb{N}$ ein eindeutig bestimmtes $f_n \in \Gamma(K_n, \mathcal{F}_{n+1})$ mit $\sum_{k=2}^{\infty} s_{n+k}|_{K_n} = f_n$, denn $\sum_{k=2}^{\infty} \|s_{n+k}\|_{n+2}^{n+2} \leq \sum_{k=2}^{\infty} \|s_{n+k}\|_{n+k}^{n+k} < \infty$. Es gilt $f_{n+1}|_{K_n} - f_n = -s_{n+2}|_{K_n}$.

Nun definieren wir $\beta'_n \in C^0(V \wedge K_n, \mathcal{F}_{n+1})$ durch

$$\begin{aligned} \beta'_n &= \beta_{n+2}|_{K_n} + f_n \text{ für } n \in \mathbb{N}. \text{ Es gilt } \beta'_{n+1}|_{K_n} - \beta'_n = \\ &= (\beta_{n+3} + f_{n+1} - \beta_{n+2} - f_n)|_{K_n} = (\beta_{n+3} - \beta_{n+2})|_{K_n} + (f_{n+1}|_{K_n} - f_n) = \\ &= (s_{n+2} - s_{n+2})|_{K_n} \equiv 0, \text{ und wir können analog zum Beweis} \\ &\text{von Satz 4.3 Koketten } \tilde{\beta}_n \in C^0(V \wedge B_{n+1}, \mathcal{F}_{n+1}) \text{ definieren mit} \\ &\tilde{\beta}_{n+1}|_{B_{n+1}} = \tilde{\beta}_n \text{ und daraus und aus der Eigenschaft (+)} \\ &\text{von } \mathcal{F} \text{ folgern, daß es eine Kokette } \beta \in C^0(V, \mathcal{F}) \text{ gibt mit} \\ &\beta|_{B_{n+1}} = \tilde{\beta}_{n+2}. \text{ Insbesondere gilt dann } (\beta - \beta_{n+2})|_{K_n} = \\ &= (\tilde{\beta}_{n+2} - \beta_{n+2})|_{K_n} = (\beta_{n+2} + f_n - \beta_{n+2})|_{K_n} = f_n \in \Gamma(K_n, \mathcal{F}_{n+1}). \quad /// \end{aligned}$$

K A P I T E L 5

Holomorphe Fortsetzbarkeit holomorpher Funktionen von endlich-dimensionalen analytischen Mengen auf ein konvexes Gebiet eines Silva-Raumes mit Basis

Als erste Anwendung von Theorem 4.1 bringen wir die holomorphe Fortsetzbarkeit holomorpher Funktionen von einer endlich-dimensionalen analytischen Teilmenge A eines Gebietes Ω eines Silva-Raumes E mit Schauder-Basis auf das Gebiet Ω . Dabei gelingt uns dies mit Theorem 5.1 nur für konvexe Gebiete, da das Ergebnis von Mazet ([29], Théorème VI.3), was wir verwenden, nur für konvexe Gebiete gilt. Für pseudokonvexe Gebiete zeigen wir diese Fortsetzbarkeit mit Satz 5.2 lediglich für analytische Teilmengen $A \subset \Omega$, die lokal in endlich-dimensionalen linearen Teilräumen von E enthalten sind.

Dabei ist nicht jede endlich-dimensionale analytische Teilmenge lokal in endlich-dimensionalen Teilräumen enthalten: So sei zum Beispiel $E := s'$ der Dualraum des Folgenraumes $s := \{ (z_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} ; \sum_{j=1}^{\infty} |z_j| j^q < \infty \text{ für alle } q \in \mathbb{N} \}$.

Auch E hat eine Darstellung als Folgenraum,

$E = \{ (z_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} ; \text{es gibt ein } q \in \mathbb{N} \text{ mit } |z_j| \leq q j^q \text{ für } j \in \mathbb{N} \},$

und E ist ein DFN -Raum (also insbesondere ein Silva-Raum) mit Schauder-Basis, vgl. Vogt [48]. Die Abbildung

$\phi: \mathbb{C} \supset B_1 \rightarrow E, \zeta \mapsto (\zeta^j)_{j \in \mathbb{N}}$ ist analytisch und eigentlich,

und somit ist $\phi(B_1)$ eine endlich-dimensionale analytische Menge (vgl. Definition 1.13). Doch A ist nicht lokal in endlich-dimensionalen linearen Teilräumen von E enthalten: Wäre nämlich A in einer Umgebung der 0 in einem n -dimensionalen linearen Teilraum von E enthalten, so gäbe es ein $m \in \mathbb{N}$, so daß $\{\phi(2^{-i}); m \leq i \leq m+n+1\}$ linear abhängig wäre, d.h. es gäbe $\lambda_i \in \mathbb{C}$, nicht alle gleich 0 , mit $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i 2^{-(m+i-1)} = 0$. Betrachtet man die ersten $(n+1)$ Koordinaten der kanonischen Basis von E , so erhält man das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} 2^{-(m+i-1)} \lambda_i &= 0 \\ \sum_{i=1}^{n+1} 2^{-2(m+i-1)} \lambda_i &= 0 \\ &\vdots \\ \sum_{i=1}^{n+1} 2^{-(n+1)(m+i-1)} \lambda_i &= 0. \end{aligned}$$

Da aber $\det(2^{-k(m+i-1)})_{1 \leq i, k \leq n+1} = \prod_{j=1}^{n+1} 2^{-(m+j-1)} \cdot \prod_{k>j} (2^{-k} - 2^{-j}) \neq 0$ gilt (man vergleiche die Vandermondsche Determinante), hat dieses lineare Gleichungssystem genau eine, nämlich die triviale Lösung, was ein Widerspruch ist.

In diesem Kapitel sei weiterhin $E = \varprojlim B_n$ ein komplexer Silva-Raum mit Schauder-Basis mit injektiven kompakten Verbindungshomomorphismen $\pi_{nm}: B_n \rightarrow B_m$ (für $n \leq m$) und $\pi_n: B_n \rightarrow E$, wobei B_n für $n \in \mathbb{N}$ ein komplexer Banach-Raum sei.

Ist $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Schauder-Basis von E , so sei $p_n: E \rightarrow E$, $\sum_{i \in \mathbb{N}} \xi_i e_i \mapsto \sum_{i=1}^n \xi_i e_i$ die Projektion auf die ersten n Komponenten und $E_n := p_n E \cong \mathbb{C}^n$. Weiter sei E^n ein Komplementärraum zu E_n in E und $p^n: E = E_n \oplus E^n \rightarrow E^n$, $(x, y) \mapsto y$. Schließlich sei $pr_n: E \rightarrow \mathbb{C}$, $\sum_{i \in \mathbb{N}} \xi_i e_i \mapsto \xi_n$ für $n \in \mathbb{N}$ definiert.

5.1 Theorem:

Es sei $\Omega \subset E$ ein konvexes Gebiet und $A \subset \Omega$ eine endlich-dimensionale analytische Teilmenge. Dann gilt $H^1(\Omega, I_A) = 0$ für die Idealgarbe I_A von A .

Beweis:

Nach Bemerkung-4.2 a) besitzt die Idealgarbe I_A die in Kapitel 4 definierte Eigenschaft (+), d.h. für eine offene Menge $U \subset \Omega$ ist genau dann $f \in I_A(U)$, wenn $f \circ \pi_n|_U \in (I_A)_n(U \cap B_n)$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$.

Es genügt folglich zu zeigen, daß Ω eine kompakte Ausschöpfung $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit den in Theorem 4.1 genannten Eigenschaften a) und b) besitzt.

Wir zeigen zuerst, daß $H^1(K, I_A) = 0$ gilt für eine beliebige kompakte holomorph-konvexe Menge $K \subset \Omega$.

Für die endlich-dimensionale analytische Menge A gilt $A = \phi(X)$ mit einem reduzierten komplexen Raum X

(der klassischen Theorie) und einer holomorphen eigentlichen Abbildung $\phi: X \rightarrow \Omega$. Nach Mazet [29], Théorème VI.3, gibt es eine relativ-kompakte offene Umgebung $U \subset X$ von $\phi^{-1}(K)$, eine Zerlegung von E in lineare Teilräume $E = G \times F$ mit $\dim G < \infty$, eine offene konvexe Menge $\omega \subset G$, eine holomorphe eigentliche Abbildung $\psi: U \rightarrow \omega$ und eine holomorphe Abbildung $\theta: \omega \rightarrow F$ mit $\phi(x) = (\psi(x), \theta \circ \psi(x))$ für $x \in U$. Dabei zeigt der Beweis von [29], Théorème VI.3, daß ω so gewählt werden kann, daß die Projektion $p_G(K)$ von K auf G in ω enthalten ist (indem man ω um K anstatt um $\phi(\phi^{-1}(K))$ konstruiert).

Nun definieren wir $\Theta: \omega \times F \rightarrow \omega \times F$, $(x, y) \mapsto (x, y - \theta(x))$. Die Abbildung Θ ist biholomorph, und es gilt $\Theta(A \cap K) \subset G$.

Da auch $\Theta(K) \cap G \subset G$ kompakt und holomorph-konvex ist, gibt es nach der endlich-dimensionalen Theorie zu jeder holomorphen Funktion $g \in \mathcal{O}(\Theta(A \cap K))$ eine holomorphe Funktion $\tilde{g} \in \mathcal{O}(\Theta(K) \cap G)$ mit $\tilde{g}|_{\Theta(A)} \equiv g$. Daraus wiederum folgt, daß es für jede holomorphe Funktion $f \in \mathcal{O}(A \cap K)$ eine holomorphe Funktion $(f \circ \theta^{-1}) \circ p_G \circ \theta|_K \in \mathcal{O}(K)$ gibt mit

$$(\widetilde{f \circ \theta^{-1}}) \circ p_G \circ \theta|_A = (f \circ \theta^{-1})|_{\Theta(A)} = f \circ \theta^{-1}|_{\Theta(A)} = f|_A.$$

Aus Satz 5.3 folgt damit $H^1(K, I_A) = 0$.

Um nun die Gültigkeit der Voraussetzungen von Theorem 4.1 zu beweisen, gehen wir aus von einer zulässigen Ausschöpfungsfolge $(\tilde{K}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Ω durch kompakte holomorph-konvexe Mengen $\tilde{K}_1 \subset \tilde{K}_2 \subset \dots$ mit der in Kapitel 4 definierten Eigenschaft (*)

(nach Bemerkung 4.2 b) gibt es eine solche Ausschöpfungsfolge). Daraus wollen wir eine zulässige kompakte Ausschöpfungsfolge $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Ω durch holomorph-konvexe Mengen $K_1 \subset K_2 \subset \dots$ konstruieren, so daß es für $n \in \mathbb{N}$ und $q < n$ Homomorphismen $K_n \rightarrow L_n = L_n^1 \times L_n^2$ bzw. $K_q \rightarrow L_{qn} = L_{qn}^1 \times L_{qn}^2$ gibt mit $L_{qn}^1 \subset L_n^1$ in einem endlich-dimensionalen linearen Teilraum von E und $L_{qn}^2 \subset L_n^2$, welche $A \cap K_n$ bzw. $A \cap K_q$ in L_n^1 bzw. L_{qn}^1 abbilden. Dann sind wir in der Lage, mit Hilfe des ε -Produkts (vgl. Schottenloher [41]) Isomorphismen $\phi_n: \Gamma(K_n, \mathcal{O}^N) \rightarrow \Gamma(K_n, I_A)$ zu definieren, welche für $q < n$ Isomorphismen $\phi_n^q: \Gamma(K_q, \mathcal{O}^N) \rightarrow \Gamma(K_q, I_A)$ induzieren.

Nach Mazet [29], Théorème VI.3, gibt es wiederum für $n \in \mathbb{N}$ eine relativ-kompakte offene Umgebung $U_n \subset X$ von $\phi_n^{-1}(\tilde{K}_n)$, eine Zerlegung von E in lineare Teilräume $E = G_n \times F_n$ mit $\dim G_n < \infty$, eine offene konvexe Menge $\omega_n \subset G_n$ (welche wiederum o.E. $p_{G_n}(\tilde{K}_n)$ enthält), eine holomorphe eigentliche Abbildung $\psi_n: U_n \rightarrow \omega_n$ und eine holomorphe Abbildung $\xi_n: \omega_n \rightarrow F_n$ mit $\phi(x) = (\psi_n(x), \xi_n \circ \psi_n(x))$ für $x \in U_n$. Eine Schauder-Basis $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von E sei so gewählt, daß es für $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl $k_n \in \mathbb{N}$ gibt mit $G_n \subset p_{k_n} E$.

Für $n \in \mathbb{N}$ und $k \geq k_n$ bezeichne θ_n^k die biholomorphe Abbildung $\omega_n \times G_n^k \times E^k \rightarrow \omega_n \times G_n^k \times E^k$, $(x, y, z) \mapsto (x, y, z - p^k(\theta_n^k x))$, wobei G_n^k ein Komplementärraum zu G_n in E_k sei, d.h. $E = G_n \oplus G_n^k$.

Wir zeigen jetzt, daß es für $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl $l_n \in \mathbb{N}$ gibt mit $p_{l_n}(\tilde{K}_n) \times \prod_{i>l_n} \text{pr}_i((\Theta_n^{l_n})^{-1}(\tilde{K}_n) \cup \tilde{K}_n \cup \Theta_n^{l_n} \tilde{K}_n) \subset \Omega$ und $(\Theta_n^{l_n})^{-1}(p_{l_n}(\tilde{K}_n) \times \prod_{i>l_n} \text{pr}_i((\Theta_n^{l_n})^{-1}(\tilde{K}_n) \cup \tilde{K}_n \cup \Theta_n^{l_n} \tilde{K}_n)) \subset \Omega$.

Ist für unendlich viele $k \in \mathbb{N}$ (o.E. für alle $k \in \mathbb{N}$) die erste Bedingung nämlich nicht erfüllt, so gibt es für $k \geq k_n$ ein $x_k \in (p_k(\tilde{K}_n) \times \prod_{i>k} \text{pr}_i((\Theta_n^k)^{-1}(\tilde{K}_n) \cup \tilde{K}_n \cup \Theta_n^k \tilde{K}_n)) \setminus \Omega$. Dabei ist jedes x_k enthalten in der kompakten Menge $\tilde{K} := p_{k_n} \tilde{K}_n \times \prod_{i>k_n} \text{pr}_i((\Theta_n^k)^{-1}(\tilde{K}_n) \cup \tilde{K}_n \cup \Theta_n^k \tilde{K}_n) \setminus \Omega$, denn für $k_n < i \leq k$ ist $\text{pr}_i((\Theta_n^k)^{-1}(\tilde{K}_n) \cup \tilde{K}_n \cup \Theta_n^k \tilde{K}_n) = \text{pr}_i \tilde{K}_n$ nach Definition von Θ_n^k . Somit hat die Folge $(x_k)_{k \geq k_n}$ einen Häufungswert (o.E. einen Grenzwert) $x \in \tilde{K}$. Für $i \in \mathbb{N}$ gilt aber $p_i x = p_i(\lim_{k \rightarrow \infty} x_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} p_i x_k \in p_i \tilde{K}_n$. Folglich ist $x \in \tilde{K}_n \subset \Omega$, was ein Widerspruch ist zu $x \in \tilde{K}$.

Ist schließlich für unendlich viele (o.E. wiederum für alle) $k \in \mathbb{N}$ die zweite Bedingung nicht erfüllt, so gibt es für $k \geq k_n$ ein $x_k \in (\Theta_n^k)^{-1}(p_k \tilde{K}_n \times \prod_{i>k} \text{pr}_i((\Theta_n^k)^{-1}(\tilde{K}_n) \cup \tilde{K}_n \cup \Theta_n^k \tilde{K}_n)) \setminus \Omega$. Jedes x_k ist enthalten in der kompakten Menge $\hat{K} := \prod_{i \in \mathbb{N}} \text{pr}_i((\Theta_n^{k_n})^{-1}(\tilde{K}) \cup \tilde{K}) \setminus \Omega$, und die Folge $(x_k)_{k \geq k_n}$ hat einen Häufungswert (o.E. wiederum einen Grenzwert) $x \in \hat{K}$. Für $i \in \mathbb{N}$ gilt aber $p_i x = p_i(\lim_{k \rightarrow \infty} x_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} p_i x_k \in p_i \tilde{K}_n \subset \Omega$, da $(\Theta_n^k)^{-1}$ die ersten k Koordinaten unverändert läßt. Das ist

wiederum ein Widerspruch zu $x \in \hat{K}$, und die Behauptung ist gezeigt. Da wir l_n beliebig groß wählen dürfen, sei o.E. $l_{n+1} \geq l_n \geq k_n$.

Wir definieren nun induktiv eine zulässige Ausschöpfungsfolge $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Ω durch kompakte holomorph-konvexe Mengen $K_1 \subset K_2 \subset \dots$, welche die Eigenschaft (*) besitze. Es sei

$$K_1 := (\theta_1^{l_1})^{-1} (p_{l_1} \tilde{K}_1 \times \prod_{i>l_1} \text{pr}_i (\tilde{K}_1 \vee \theta_1^{l_1} \tilde{K}_1)) \subset \Omega \text{ und } m_1 := 1.$$

Sind $K_1, \dots, K_{n-1}$ und $m_1, \dots, m_{n-1} \in \mathbb{N}$ bereits gewählt, so wählen wir eine natürliche Zahl $m_n \in \mathbb{N}$ mit

$$K_{n-1} \vee (p_{l_{m_n-1}} \tilde{K}_{m_n-1} \times \prod_{i>l_{m_n-1}} \text{pr}_i ((\theta_{m_n-1}^{l_{m_n-1}})^{-1} (\tilde{K}_{m_n-1}) \vee \tilde{K}_{m_n-1} \vee \theta_{m_n-1}^{l_{m_n-1}} \tilde{K}_{m_n-1})) \subset \tilde{K}_{m_n-1} \text{ und definieren}$$

$$K_n := (\theta_{m_n}^{l_{m_n}})^{-1} (p_{l_{m_n}} \tilde{K}_{m_n} \times \prod_{i>l_{m_n}} \text{pr}_i (\tilde{K}_{m_n} \vee \theta_{m_n}^{l_{m_n}} \tilde{K}_{m_n})).$$

Die so gewonnene Ausschöpfungsfolge $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist zulässig und monoton wachsend, denn es gilt $K_{n-1} \subset \tilde{K}_{m_n-1} \subset$

$$\subset \tilde{K}_{m_n} = (\theta_{m_n}^{l_{m_n}})^{-1} (\theta_{m_n}^{l_{m_n}} \tilde{K}_{m_n}) \subset (\theta_{m_n}^{l_{m_n}})^{-1} (p_{l_{m_n}} \tilde{K}_{m_n} \times \prod_{i>l_{m_n}} \text{pr}_i (\theta_{m_n}^{l_{m_n}} \tilde{K}_{m_n})) \subset$$

K_n , und sie besitzt die Eigenschaft (*): Ist nämlich

$$V_n \subset B_{k(n)} \text{ offen mit } \tilde{K}_n \subset V_n \subset \tilde{K}_{n+1}, \text{ so ist } V_{m_n-1} \subset B_{k(m_n-1)}$$

$$\text{offen mit } K_{n-1} \subset \tilde{K}_{m_n-1} \subset V_{k(m_n-1)} \subset \tilde{K}_{m_n} \subset K_n.$$

Jede Menge $L_n := \bigoplus_{m_n}^{l_{m_n}} K_n$ läßt sich darstellen in der Form

$L_n = L'_n \times L''_n$ mit $L'_n \subset E_{1_{m_n}}$. Für $q < n$ und $x \in \omega_{m_q} \times G_{m_q} \times E_{1_{m_q}}^{1_{m_q}}$
 ist $\text{pr}_i((\theta_{m_q}^{1_{m_n}}(\theta_{m_q}^{1_{m_q}})^{-1}(x))) = \text{pr}_i((\theta_{m_q}^{1_{m_q}})^{-1}(x))$ für $1_{m_q} < i \leq 1_{m_n}$
 und $\text{pr}_i(x)$ sonst. Somit läßt sich $L_{q_n} := \theta_{m_q}^{1_{m_n}} K_q$ für $q < n$
 darstellen in der Form $L_{q_n} = L'_{q_n} \times L''_{q_n}$ mit $L'_{q_n} \subset L'_n$ und
 $L''_{q_n} \subset L''_n$, denn $L_{q_n} = \theta_{m_q}^{1_{m_n}} \cdot (\theta_{m_q}^{1_{m_q}})^{-1} (p_{1_{m_q}} \tilde{K}_{m_q} \times \prod_{i>1_{m_q}} \text{pr}_i(\tilde{K}_{m_q} \vee \theta_{m_q}^{1_{m_q}} \tilde{K}_{m_q})) \subset$
 $\subset p_{1_{m_q}} \tilde{K}_{m_q} \times \prod_{i=1_{m_q}+1}^{1_{m_n}} \text{pr}_i((\theta_{m_q}^{1_{m_q}})^{-1}(\tilde{K}_{m_q} \vee \theta_{m_q}^{1_{m_q}} \tilde{K}_{m_q})) \times \prod_{i>1_{m_n}} \text{pr}_i(\tilde{K}_{m_q} \vee \theta_{m_q}^{1_{m_q}} \tilde{K}_{m_q})$
 $\subset \tilde{K}_{m_q+1}^{-1} \subset \tilde{K}_{m_n} \subset p_{1_{m_n}} \tilde{K}_{m_n} \times \prod_{i>1_{m_n}} \text{pr}_i(\tilde{K}_{m_n} \vee \theta_{m_n}^{1_{m_n}} \tilde{K}_{m_n}) = \theta_{m_n}^{1_{m_n}} K_n = L_n$.

Nun gilt $O(L_n) = O(L'_n \times L''_n) \cong O(L''_n, O(L'_n)) \cong \mathcal{L}_{\mathcal{E}}(O(L'_n)', O(L''_n)) \cong$
 $\cong \mathcal{L}_{\mathcal{E}}(O(L''_n)', O(L'_n)) =: O(L'_n) \in O(L''_n)$ mittels den Isomorphismen
 $f \mapsto (g: z \mapsto f(., z)) \mapsto (h: u \mapsto u \circ g) \mapsto h^t$. Dabei sei h^t
 die zu h transponierte Abbildung, und für topologische
 Vektorräume A und B sei $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}(A', B)$, die Menge aller stetigen
 linearen Abbildungen von A' nach B , versehen mit der Topo-
 logie der gleichmäßigen Konvergenz auf allen gleichstetigen
 Mengen von A' . Näheres dazu findet man bei Schottenloher [41].

Da $\theta_{m_n}^{1_{m_n}}(A \wedge K_n)$ in L'_n enthalten ist, liefern obige
 Abbildungen Isomorphismen $I_{\theta_{m_n}^{1_{m_n}}(A \wedge K_n)}^{1_{m_n}}(L_n) = I_{\theta_{m_n}^{1_{m_n}}(A \wedge K_n)}^{1_{m_n}}(L'_n \times L''_n) \cong$

$$\begin{aligned} \cong \mathcal{O}(L_n'', I \underset{\Theta_{m_n}(A \wedge K_n)}{1_{m_n}}(L_n')) &\cong \mathcal{L}_{\mathcal{E}}(I \underset{\Theta_{m_n}(A \wedge K_n)}{1_{m_n}}(L_n')', \mathcal{O}(L_n'')) \cong \\ &\cong \mathcal{L}_{\mathcal{E}}(\mathcal{O}(L_n'')', I \underset{\Theta_{m_n}(A \wedge K_n)}{1_{m_n}}(L_n')) =: I \underset{\Theta_{m_n}(A \wedge K_n)}{1_{m_n}}(L_n')' \in \mathcal{O}(L_n''). \end{aligned}$$

Auf Grund der endlich-dimensionalen Theorie (man beachte, daß $I \underset{\Theta_{m_n}(A \wedge K_n)}{1_{m_n}} | L_n'$ kohärent ist - vgl. Gunning-

Rossi [17], IV D 2 und die Sequenzen (2) und (3) bei Andreian Cazacu [1], VI § 3 - gibt es eine natürliche Zahl $N_n \in \mathbb{N}$

und einen Epimorphismus $\mathcal{O}^{N_n} | L_n' \rightarrow I \underset{\Theta_{m_n}(A \wedge K_n)}{1_{m_n}} | L_n'$, der Epi-

morphismen $\phi_n: \mathcal{O}(L_n')^{N_n} \rightarrow I \underset{\Theta_{m_n}(A \wedge K_n)}{1_{m_n}}(L_n')$ und (wegen der

Exaktheit der Beschränkung von Garben, vgl. Satz 10.2 bei

Kultze [27]) $\phi_n^q: \mathcal{O}(L_{qn}')^{N_n} \rightarrow I \underset{\Theta_{m_n}(A \wedge K_n)}{1_{m_n}}(L_{qn}') = I \underset{\Theta_{m_q}(A \wedge K_q)}{1_{m_n}}(L_{qn}')$

induziert für $q < n$ (denn $\underset{\Theta_{m_n}(A \wedge K_n)}{1_{m_n}} \wedge L_{qn}' = \underset{\Theta_{m_q}(A \wedge K_q)}{1_{m_n}}(L_{qn}')$).

Dann ist $\hat{\phi}_n: \mathcal{L}_{\mathcal{E}}(\mathcal{O}(L_n'')', \mathcal{O}(L_n'))^{N_n} \rightarrow \mathcal{L}_{\mathcal{E}}(\mathcal{O}(L_n'')', I \underset{\Theta_{m_n}(A \wedge K_n)}{1_{m_n}}(L_n'))$

mit $\hat{\phi}_n(\alpha_1, \dots, \alpha_{N_n})(u) := \phi_n(\alpha_1(u), \dots, \alpha_{N_n}(u))$ wohldefiniert

und surjektiv, und $\hat{\phi}_n$ definiert einen Epimorphismus

$\tilde{\phi}_n: \mathcal{O}(L_n)^{N_n} \rightarrow I \underset{\Theta_{m_n}(A \wedge K_n)}{1_{m_n}}(L_n)$, welcher für $q < n$ einen

Epimorphismus $\tilde{\phi}_n^q: \mathcal{O}(L_{qn})^{N_n} \rightarrow I_{\ominus_{m_q}^{1_m n}(A, K_q)}(L'_{qn})$ induziert.

Definieren wir nun $\phi_n: \mathcal{O}(K_n)^{N_n} \rightarrow I_A(K_n)$,
 $(f_1, \dots, f_{N_n}) \mapsto \tilde{\phi}_n(f_1 \circ \ominus_{m_n}^{1_m n}, \dots, f_{N_n} \circ \ominus_{m_n}^{1_m n}) \circ \ominus_{m_n}^{1_m n}$, so ist ϕ_n
 ein wohldefinierter Epimorphismus, der für $q < n$ Epimor-

phismen $\phi_n^q: \mathcal{O}(K_q)^{N_n} \rightarrow I_A(K_q)$,

$(f_1, \dots, f_{N_n}) \mapsto \tilde{\phi}_n^q(f_1 \circ \ominus_{m_q}^{1_m n}, \dots, f_{N_n} \circ \ominus_{m_q}^{1_m n}) \circ \ominus_{m_q}^{1_m n}$ induziert.

Da nach dem ersten Teil des Beweises $H^1(K_n, I_A) = 0$ ist
 für $n \in \mathbb{N}$, sind die Bedingungen von Theorem 4.1 erfüllt,
 und es gilt $H^1(\Omega, I_A) = 0$. ///

Bevor wir den Beweis von Theorem 5.1 durch den Beweis
 von Satz 5.3 beenden, verallgemeinern wir die Aussage von
 Theorem 5.1 für andere analytische Mengen:

5.2 Satz:

Es sei $\Omega \subset E$ ein pseudokonvexes Gebiet und $A \subset \Omega$ eine
 analytische Menge, welche lokal in endlich-dimensionalen
 linearen Teilräumen von E enthalten ist. Dann gilt
 $H^1(\Omega, I_A) = 0$.

Beweis:

Wir zeigen, daß A dieselben Eigenschaften hat, die wir im Beweis zu Theorem 5.1 aus Mazet [29], Théorème VI. 3, gefolgert haben. Dann folgt die Behauptung wie im Beweis zu Theorem 5.1

Es sei $K \subset \Omega$ eine kompakte holomorph-konvexe Menge. Nach Voraussetzung gibt es für jeden Punkt $x \in K$ eine offene Umgebung $U_x \subset \Omega$ von x und einen endlich-dimensionalen linearen Teilraum $G_x \subset E$ mit $A \cap U_x \subset G_x$. Da K kompakt ist, gibt es $x_1, \dots, x_m \in K$ mit $K \subset \bigcup_{i=1}^m U_{x_i} =: U$. Ist G der von $\bigcup_{i=1}^m G_{x_i}$ erzeugte lineare Teilraum von E , so ist $\dim G < \infty$, und es gilt $A \cap U \subset G$.

Ist jetzt F ein Komplementärraum zu G in E , ω eine beschränkte offene pseudokonvexe Umgebung von $K \cap G$, die in $U \cap G$ enthalten ist, und $\theta: \omega \rightarrow F$, $x \mapsto 0$, so haben wir dieselbe Situation wie am Beginn des Beweises von Theorem 5.1, und wir können ebenso wie dort die Behauptung beweisen, wobei der Beweis durch die Tatsache, daß $\theta_n^k = \text{id}_E$ ist für $n \in \mathbb{N}$ und $k \geq k_n$, wesentlich einfacher wird. ///

Nun kommen wir zum Satz 5.3:

5.3 Satz:

Es sei $M \subset E$ abgeschlossen oder ein pseudokonvexes Gebiet und $A \subset M$ eine analytische Menge. Dann ist die Restriktionsabbildung $\Gamma(M, \mathcal{O}) \rightarrow \Gamma(A, \mathcal{O})$ genau dann surjektiv, wenn $H^1(M, \mathcal{I}_A) = 0$ ist.

Beweis:

Wir betrachten die exakte Garbensequenz
 $0 \rightarrow \mathcal{I}_A \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}/\mathcal{I}_A \rightarrow 0$. M ist parakompakt (vgl. Satz 1.27 bzw. Satz 1 in Schubert [45], I 8.5), und somit erhalten wir (vgl. Andreian Cazacu [1], II § 8 Theorem 11) die exakte Sequenz $\Gamma(M, \mathcal{O}) \rightarrow \Gamma(M, \mathcal{O}/\mathcal{I}_A) \rightarrow H^1(M, \mathcal{I}_A)$. Auf Grund der Isomorphie $\Gamma(M, \mathcal{O}/\mathcal{I}_A) \cong \Gamma(A, \mathcal{O})$ folgt daraus die Behauptung.

///

Mit Theorem 5.1 und Satz 5.2 erhalten wir daraus sofort die nächste Folgerung:

5.4 Korollar:

Ist $\Omega \subset E$ ein pseudokonvexes Gebiet und $A \subset \Omega$ eine analytische Teilmenge, welche lokal in einem endlich-dimensionalen linearen Teilraum von E enthalten ist (bzw. eine endlich-dimensionale analytische Menge, wenn Ω sogar konvex ist), so ist die Restriktionsabbildung $\Gamma(\Omega, \mathcal{O}) \rightarrow \Gamma(A, \mathcal{O})$ surjektiv, d.h. jede holomorphe Funktion auf A läßt sich holomorph nach Ω fortsetzen.

Korollar 5.4 bewirkt auch einen einfachen Beweis folgender Aussage:

5.5 Korollar:

Es sei $\Omega \subset E$ ein pseudokonvexes Gebiet, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \Omega$ eine Folge ohne Häufungswert und $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ beliebig. Dann gibt es eine holomorphe Funktion $f \in O(\Omega)$ mit $f(x_n) = z_n$. Insbesondere gibt es eine holomorphe Funktion $g \in O(\Omega)$ mit $|g(x_n)| \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$.

K A P I T E L 6

Das Verschwinden der ersten Kohomologiegruppe einer lokal-N-freien $\mathcal{O}$ -Modul-Garbe über einem pseudokonvexen Gebiet eines DFN -Raumes mit Basis

Nachdem wir im letzten Kapitel die Fortsetzungseigenschaft holomorpher Funktionen auf endlich-dimensionalen analytischen Mengen gezeigt haben, wollen wir nun dieselbe Eigenschaft für analytische Hyperflächen auf pseudokonvexen Gebieten eines DFN -Raumes mit Schauder-Basis zeigen.

Dazu beweisen wir mit Ergebnissen von Ramis [37] und Mazet [29], daß die Idealgarbe I_A einer analytischen Hyperfläche A lokal-frei vom Rang 1 ist (Satz 6.4), und beweisen allgemein mit Hilfe des Cartanschen Heftungslemmas (Satz 3.1), daß $H^1(\Omega, \mathcal{F}) = 0$ ist für eine vom Rang $n \in \mathbb{N}$ lokal-freie $\mathcal{O}$ -Modul-Garbe $\mathcal{F}$ über einem pseudokonvexen Gebiet Ω eines DFN -Raumes mit Basis.

In diesem Kapitel sei stets $E = \varprojlim H_n$ ein komplexer DFN -Raum mit Schauder-Basis $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ und injektiven nuklearen Verbindungshomomorphismen $\pi_{nm}: H_n \rightarrow H_m$ (für $n \leq m$) bzw. $\pi_n: H_n \rightarrow E$ zwischen den Hilbert-Räumen H_n . Schließlich sei $\Omega \subset E$ ein pseudokonvexes Gebiet.

Auf E seien die Projektionen $p_n: E \rightarrow \mathbb{C}$, $\sum_{i \in \mathbb{N}} \xi_i e_i \mapsto \xi_n$ und $p_n: E \rightarrow E$, $\sum_{i \in \mathbb{N}} \xi_i e_i \mapsto \sum_{i=1}^n \xi_i e_i$ definiert. E^n sei ein Komplementärraum von $E_n := p_n(E)$, d.h. es gilt $E = E_n \oplus E^n$.

6.1 Theorem:

Für eine vom Rang N lokal-freie $\mathcal{O}$ -Modul-Garbe $\mathcal{F}$ auf Ω ist $H^1(\Omega, \mathcal{F}) = 0$.

Beweis:

Es genügt, $\mathcal{F}|_K \cong \mathcal{O}^N|_K$ zu zeigen für eine kompakte holomorph-konvexe Menge $K \subset \Omega$. Nach Satz 2.10 gilt dann (in Verbindung mit Hilfssatz 3.3) $H^1(K, \mathcal{F}) = 0$, und der Isomorphismus $\mathcal{F}|_K \rightarrow \mathcal{O}^N|_K$ induziert für eine kompakte Menge $K' \subset K$ einen Isomorphismus $\mathcal{F}|_{K'} \rightarrow \mathcal{O}^N|_{K'}$ (vgl. Kultze [27], 10.2) und Isomorphismen $\Gamma(K, \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(K, \mathcal{O}^N)$ bzw. $\Gamma(K', \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(K', \mathcal{O}^N)$ (vgl. [27], 3.9). Demnach kann man gemäß Bemerkung 4.2 b) das Theorem 4.1 anwenden, wenn gezeigt ist, daß $\mathcal{F}$ die in Kapitel 4 definierte Eigenschaft (+) besitzt. Da aber diese Eigenschaft lokal ist, und da $\mathcal{F}$ lokal isomorph zu $\mathcal{O}^N$ ist, folgt die Eigenschaft (+) aus Bemerkung 4.2 a).

Es sei also $K \subset \Omega$ eine beliebige kompakte holomorph-konvexe Menge. Nach Voraussetzung gibt es für $x \in K$ eine offene konvexe Umgebung $V_x \subset \Omega$ mit $\mathcal{F}|_{V_x} \cong \mathcal{O}^N|_{V_x}$. Lemma 6.2

zeigt, daß es für $x \in K$ eine natürliche Zahl $n_x \in \mathbb{N}$ und offene Mengen $U_1^x, \dots, U_{n_x}^x \subset \mathbb{E}$ gibt mit

$$x \in \overline{U_1^x} \times \dots \times \overline{U_{n_x}^x} \times \prod_{i > n_x} \text{pr}_i K \subset V_x.$$

Es sei $\tilde{U}_x \subset E^{n_x}$ eine offene Umgebung von $\prod_{i > n_x} \text{pr}_i K$.

Dann ist $(U_1^x \times \dots \times U_{n_x}^x \times \tilde{U}_x)_{x \in K}$ eine offene Überdeckung der kompakten Menge K , und somit gibt es $x_1, \dots, x_m \in K$, so daß K durch $(U_1^{x_i} \times \dots \times U_{n_{x_i}}^{x_i} \times \tilde{U}_{x_i})_{1 \leq i \leq m}$ überdeckt wird.

Sei nun $n := \max\{n_{x_1}, \dots, n_{x_m}\}$. Für $n_{x_i} < j \leq m$ sei

$U_j^{x_i}$ eine offene Umgebung von $\text{pr}_j K \subset \mathbb{E}$, so daß $\overline{U_1^{x_i}} \times \dots \times \overline{U_n^{x_i}} \times \prod_{j > n} \text{pr}_j K$ in V_{x_i} enthalten ist. K wird bereits durch $(U_1^{x_i} \times \dots \times U_n^{x_i} \times \prod_{j > n} \text{pr}_j K)_{1 \leq i \leq m}$ überdeckt, und analog

dem zweiten Teil des Beweises von Lemma 3.2 (Lemma 3.2

behandelt den Fall $n=1$) kann man offene konvexe Umgebungen $\tilde{U}_i$

wählen mit $U_1^{x_i} \times \dots \times U_n^{x_i} \times \prod_{j > n} \text{pr}_j K \subset U_1^{x_i} \times \dots \times U_n^{x_i} \times \tilde{U}_i \subset V_{x_i}$

für $1 \leq i \leq m$.

Mit $U'' := \bigcap_{j=1}^m \tilde{U}_j \subset E^n$ gilt dann: U'' ist eine offene und konvexe Umgebung von $\prod_{j > n} \text{pr}_j K$, $U_1^{x_i} \times \dots \times U_n^{x_i} \times U'' \subset V_{x_i}$ für $1 \leq i \leq m$ und $K \subset U_1 := \bigcup_{i=1}^m (U_1^{x_i} \times \dots \times U_n^{x_i} \times U'') \subset \Omega$.

Schließlich gilt noch $p_n K \times \prod_{i>n} pr_i K \subset U_1 = U' \times U''$ mit

$$U' := \bigcup_{i=1}^m (U_1^{x_i} \times \dots \times U_n^{x_i}) \subset E_n.$$

Nun wiederum Lemma 6.2 angewandt, diesmal auf $U' \times U''$, erhalten wir eine natürliche Zahl $k > n$ und offene achsenparallele Rechtecke $R_j \subset \mathbb{R}^k$ ($1 \leq j \leq k$) mit

$$K \subset \prod_{j=1}^k \overline{R_j} \times \prod_{j>k} pr_j K \subset U' \times U''.$$

Weiter wählen wir eine offene

$$\text{Umgebung } \tilde{V} \subset E^k \text{ von } \prod_{j>k} pr_j K \text{ mit } V := \prod_{j=1}^k \tilde{R_j} \times \tilde{V} \subset U' \times U''.$$

Man kann $R_1, \dots, R_k$ so mit einem achsenparallelen Gitter versehen, daß in R_i abgeschlossene Rechtecke R_{ij} entstehen, so daß für beliebige solche Rechtecke $R_{1j_1}, \dots, R_{kj_k}$ die Menge $R_{1j_1} \times \dots \times R_{kj_k} \times \tilde{V}$ in einer der Mengen V_{x_i} enthalten ist für $1 \leq i \leq m$.

Jetzt betrachten wir für $2 \leq i \leq k$ feste Rechtecke R_{ij_i} und lassen die Rechtecke in R_1 entlang der (senkrechten) Reihen laufen (vgl. Gunning-Rossi [17], VI F, Beweis von Theorem 5). Jeweils Hilfssatz 6.3 darauf angewandt, erhalten wir für jede Reihe $\tilde{R}$ von R_1 eine Isomorphie zwischen $\mathbb{R}$ und $\mathcal{O}^N$ in einer offenen Umgebung von $\tilde{R} \times R_{2j_2} \times \dots \times R_{kj_k} \times K''$, wobei K'' die konvexe Hülle von $\prod_{j>k} pr_j K$ sei.

Dasselbe Verfahren wenden wir auf die Reihen von R_1 an und behandeln analog $R_2, \dots, R_k$. Nach endlich vielen Schritten

erhalten wir auf diese Weise die Isomorphie von $\mathcal{F}$ und $\mathcal{O}^N$
in einer Umgebung von $R_1 \times \dots \times R_k \times K \supset K$. ///

Für den vollständigen Beweis von Theorem 6.1 benötigen wir noch zwei Aussagen. Wir beginnen mit folgendem Lemma:

6.2 Lemma:

Es sei $K \subset E$ kompakt und $x \in K$. Für eine offene Umgebung V von x gibt es dann eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ und offene achsenparallel Rechtecke $R_1, \dots, R_n \subset \mathbb{C}$, so daß gilt
 $x \in \overline{R_1} \times \dots \times \overline{R_n} \times \prod_{i>n} \text{pr}_i K \subset V$.

Beweis:

Es sei $x = \sum_{i \in \mathbb{N}} \xi_i e_i$ und $W_n := \overline{R_n(\xi_1)} \times \dots \times \overline{R_n(\xi_n)} \times \prod_{i>n} \text{pr}_i K$,
wobei $R_n(\zeta) \subset \mathbb{C}$ das offene achsenparallele Quadrat mit
Seitenlänge $\frac{1}{n}$ und Mittelpunkt ζ sei. Ist die Behauptung
des Lemmas falsch, so gilt $W_n \not\subset V$ für alle $n \in \mathbb{N}$, d.h. zu
jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $y_n \in W_n \setminus V \subset L \setminus V$
mit der kompakten Menge $L := \prod_{i \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{\zeta \in \text{pr}_i K} R_1(\zeta) \right)$. Da $L \setminus V$
kompakt ist, ist $L \setminus V$ auch folgenkompakt, und o.E. konver-
giert die Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen ein $y \in L \setminus V$. Nun gilt aber
 $\text{pr}_i y = \text{pr}_i (\lim_{n \rightarrow \infty} y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{pr}_i y_n = \xi_i$, d.h. $y = x \in V$, und
wir haben einen Widerspruch. ///

Im folgenden Hilfssatz kommen wir zur Anwendung des
Cartanschen Heftungslemmas (Satz 3.1):

6.3 Hilfssatz:

Es seien $a_1 < a_2 < a_4$ und $b_1 < b_2$ reelle Zahlen,

$$K_1 := \{x+iy \in \mathbb{C}; a_1 \leq x \leq a_2, b_1 \leq y \leq b_2\},$$

$K_1'' := \{x+iy \in \mathbb{C}; a_2 \leq x \leq a_4, b_1 \leq y \leq b_2\}$ und $K_1 := K_1' \cup K_1''$. Weiter sei $\tilde{K} \subset E^1$ eine kompakte und konvexe Menge.

Ist $\mathcal{F}$ eine $\mathcal{O}$ -Modul-Garbe über $(K_1' \cup K_1'') \times \tilde{K}$, und gilt $\mathcal{O}^N|_{K_1' \times \tilde{K}} \cong \mathcal{F}|_{K_1' \times \tilde{K}}$ und $\mathcal{O}^N|_{K_1'' \times \tilde{K}} \cong \mathcal{F}|_{K_1'' \times \tilde{K}}$ für $N \in \mathbb{N}$, so gilt $\mathcal{O}^N \cong \mathcal{F}$.

Beweis:

Es sei $K' := K_1' \times \tilde{K}$ und $K'' := K_1'' \times \tilde{K}$. Die Isomorphismen zwischen $\mathcal{O}^N|_{K'}$ und $\mathcal{F}|_{K'}$ bzw. zwischen $\mathcal{O}^N|_{K''}$ und $\mathcal{F}|_{K''}$ werden durch die Isomorphismen μ bzw. ν beschrieben.

Ist $i: \mathcal{F}|_{K' \cap K''} \rightarrow \mathcal{F}|_{K' \cap K''}$ die identische Abbildung und $\lambda := \nu^{-1} \circ i \circ \mu|_{K' \cap K''}$, so haben wir folgendes kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}^N|_{K'} & \xrightarrow{\mu} & \mathcal{F}|_{K'} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \lambda & & \downarrow i & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}^N|_{K''} & \xrightarrow{\nu} & \mathcal{F}|_{K''} & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

wobei die gestrichelten senkrechten Pfeile nur auf $K' \cap K''$ definiert sind. λ wird repräsentiert durch eine holomorphe Abbildung $f: K' \cap K'' \rightarrow GL(N; \mathbb{C})$. Nach Satz 3.1 gibt es eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ und in H_n holomorphe Abbildungen $f': K' \rightarrow GL(N; \mathbb{C})$ und $f'': K'' \rightarrow GL(N; \mathbb{C})$ mit $f(z) = f'(z) \cdot f''(z)$ für $z \in K$. Die Abbildungen $f'^{(-1)}$ und $f''^{(-1)}$ wiederum definieren Isomorphismen $\lambda': \mathcal{O}_n^N|_{K'} \rightarrow \mathcal{O}_n^N|_{K'}$ sowie $\lambda'': \mathcal{O}_n^N|_{K''} \rightarrow \mathcal{O}_n^N|_{K''}$.

Da f auch in H_n holomorph ist, läßt sich λ auch zu einem Isomorphismus $O_n^N \rightarrow O_n^N$ erweitern, und wir erhalten das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & O_n^N | K' & \xrightarrow{\mu'} & \mathcal{F}_n | K' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \lambda' & & \downarrow i & & \\ 0 & \longrightarrow & O_n^N | K' & \xrightarrow{\mu} & \mathcal{F}_n | K' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \lambda & & \downarrow i & & \\ 0 & \longrightarrow & O_n^N | K'' & \xrightarrow{\nu} & \mathcal{F}_n | K'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \lambda'' & & \downarrow i & & \\ 0 & \longrightarrow & O_n^N | K'' & \xrightarrow{\nu'} & \mathcal{F}_n | K'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

mit $\mu' := \mu \circ \lambda'$ und $\nu' := \nu \circ (\lambda'')^{-1}$. Auf K gilt

$f(z) = f'(z) \cdot f''(z)$, d.h. $\lambda'' \circ \lambda \circ \lambda' = i$, und das zeigt, daß

μ' und ν' auf K identisch sind. Somit ist

$$\chi': O_n^N | K' \cup K'' \rightarrow \mathcal{F}_n | K' \cup K'', (f_1, \dots, f_N)_x \mapsto \begin{cases} \mu'(f_1, \dots, f_N)_x & \text{für } x \in K' \\ \nu'(f_1, \dots, f_N)_x & \text{für } x \in K'' \end{cases}$$

ein wohldefinierter Isomorphismus.

$(b_i)_{1 \leq i \leq N}$ sei die kanonische Basis von O_n^N bzw. O_n^N .

Dann seien $g_i \in O_n$ und $f_i \in \mathcal{F}$ mit $\chi'(b_i) = g_i \otimes f_i$. Da χ' surjektiv ist, gibt es ein $h_i \in O_n^N$ mit $\chi'(h_i) = f_i$. Es gilt $\chi'(b_i) = g_i \otimes f_i = g_i \otimes \chi'(h_i) = \chi'(g_i h_i)$, und da χ' injektiv ist, gilt $g_i h_i = b_i$, d.h. $(h_i)_i = \frac{1}{g_i}$ und $(h_i)_j = 0$ für $i \neq j$.

Definieren wir jetzt $\chi: O_n^N | K' \cup K'' \rightarrow \mathcal{F}_n | K' \cup K''$ durch $\chi(b_i) := \frac{1}{g_i} \chi'(b_i) = f_i$, so ist χ ein Isomorphismus, und χ induziert einen Isomorphismus $O_n^N | K' \cup K'' \rightarrow \mathcal{F}_n | K' \cup K''$. ///

Auf Grund des folgenden Satzes können wir Theorem 6.1 auf Idealgarben analytischer Hyperflächen anwenden:

6.4 Satz:

Ist $A \subset \Omega$ eine analytische Hyperfläche, so ist die Idealgarbe I_A von A lokal frei (vom Rang 1).

Der Beweis dieses Satzes verläuft wie der Beweis von Théorème II.1.2.3 bei Ramis [37], wo E ein Banach-Raum ist:

Beweis:

Sei $x \in \Omega$ beliebig. Wir zeigen, daß es eine offene Umgebung $U \subset \Omega$ von x und eine holomorphe Funktion $f \in \mathcal{O}(U)$ mit $A \cap U = f^{-1}(0)$ gibt, so daß es für $y \in U$, für eine offene Umgebung $V \subset U$ von y und eine holomorphe Funktion $h \in \mathcal{O}(V)$ mit $h|_A \equiv 0$ eine offene Umgebung $W \subset V$ von y und eine holomorphe Funktion $g \in \mathcal{O}(W)$ gibt mit $h|_W = g \cdot f|_W$. Dann definiert f einen Isomorphismus $\mathcal{O}|_U \rightarrow I_A|_U$ durch $g_y \mapsto g_y \cdot f_y$ für $y \in U$, d.h. I_A ist lokal frei vom Rang 1.

Für $x \notin A$ ist diese Eigenschaft trivial; man nehme einfach $U := \Omega \setminus A$ und $f: U \rightarrow \mathbb{C}, y \mapsto 1$. Es sei also $x \in A$. O.E. sei weiterhin $x=0$. Nach Voraussetzung gibt es eine Umgebung $\tilde{U}$ von 0 und eine holomorphe Funktion $\tilde{f} \in \mathcal{O}(\tilde{U})$ mit $A \cap \tilde{U} = \tilde{f}^{-1}(0)$.

Nach Mazet [29], Proposition V.1, gibt es ein $a \in E$, so daß die holomorphe Funktion $t \mapsto \tilde{f}(ta)$ nicht in einer Nullumgebung identisch verschwindet. Es sei E^a ein Komplementärraum von $\mathbb{C}a$ bezüglich E , d.h. $E = E^a \oplus \mathbb{C}a$. Nach dem Weierstraßschen Vorbereitungssatz (Hilfssatz 6.6) gibt es

ein umkehrbares Element $h_0 \in (O_0^*)$ und den Keim eines Weierstraß-Polynoms $P_0 \in (O_{E^a})_0[X]$ mit $\tilde{f}_0 = h_0 \cdot P_0$. Nach Mazet [29], Proposition V.9, ist $(O_{E^a})_0$ faktoriell, und nach dem Satz von Gauß (vgl. Reiffen/Scheja/Vetter [38], Satz 181) ist damit auch $(O_{E^a})_0[X]$ faktoriell, und es gibt irreduzible Keime von Weierstraß-Polynomen $(P_1)_0, \dots, (P_m)_0$ und ein umkehrbares Element $\tilde{h}_0 \in (O_{E^a}^*)_0$ und natürliche Zahlen $\beta_1, \dots, \beta_m \in \mathbb{N}$ mit $P_0 = \tilde{h}_0 \cdot \prod_{i=1}^m (P_i)_0^{\beta_i}$, d.h. $\tilde{f}_0 = h_0 \cdot \tilde{h}_0 \cdot \prod_{i=1}^m (P_i)_0^{\beta_i}$.

Sei nun $f_0 := \prod_{i=1}^m (P_i)_0 \in (O_{E^a})_0[X]$. Es sei $U := U' \times U'' \subset E^a + \mathbb{A}$ eine offene Nullumgebung, so daß gilt: $(P_i)_0$ hat für $1 \leq i \leq m$ einen Repräsentanten $P_i \in O_{E^a}(U')[X]$, h_0 und $\tilde{h}_0$ haben nirgends verschwindende Repräsentanten h und $\tilde{h} \in O(U)$, und für $x \in U$ sowie $1 \leq i < j \leq m$ sind $(P_i)_x$ und $(P_j)_x$ relativ-prim (daß es eine offene Umgebung U mit letzterer Eigenschaft gibt, folgt aus Lemma 6.7).

Ist $D_i \in O(U')$ die Diskriminante von P_i für $1 \leq i \leq m$, so gilt $(D_i)_0 \neq 0$, da P_i irreduzibel ist (siehe Bemerkung nach Lemma 1.8). O.E. sei U' so klein gewählt, daß $(D_i)_x \neq 0$ gilt für $x' \in U'$.

Sei $y = y' + \eta a \in U$. Dann gibt es eine Einheit $s_{iy} \in O_y$, irreduzible Keime von Weierstraß-Polynomen $(P_{i1})_y, \dots, (P_{im})_y$

und natürliche Zahlen $\alpha_1, \dots, \alpha_{m_y} \in \mathbb{N}$ mit $(P_i)_y = s_{iy} \cdot \prod_{j=1}^{m_y} (P_{ij})_y^{\alpha_j}$ für $1 \leq i \leq m$. Da $(D_i)_y \neq 0$ ist, gilt $\alpha_1 = \dots = \alpha_m = 1$ (vgl. Lemma 1.8), und es ist $(P_{ij})_y \neq (P_{i'j'})_y$ für $(i,j) \neq (i',j')$, da $(P_i)_y$ und $(P_{i'})_y$ relativ-prim sind.

Sei nun $h_y \in \mathcal{O}_y$ der Keim einer auf $V(\tilde{f}_y) = V(f_y)$ verschwindenden holomorphen Funktion. Es gilt

$f_y = \prod_{i=1}^m s_{iy} \prod_{j=1}^{m_y} (P_{ij})_y$ mit Einheiten $s_{ij} \in \mathcal{O}_y$ und irreduziblen Keimen von Weierstraß-Polynomen $(P_{ij})_y$. Somit gibt es einen Keim $g_y \in \mathcal{O}_y$ mit $g_y = \frac{h_y}{f_y}$, d.h. es gibt in einer Umgebung $W \subset U$ von y eine holomorphe Funktion $g \in \mathcal{O}(W)$ mit $h|_W = g \cdot f|_W$. ///

Bevor wir den Weierstraßschen Vorbereitungssatz für $\mathcal{DFN}$ -Räume beweisen, notieren wir noch eine Folgerung aus Satz 6.4:

6.5 Korollar:

Es sei $A \subset \Omega$ eine analytische Hyperfläche, bzw. $A \subset F$ sei eine analytische Hyperfläche in einem abgeschlossenen linearen Teilraum F von E mit Basis. Dann sind die Restriktionsabbildungen $\mathcal{O}(\Omega) \rightarrow \mathcal{O}(A)$ bzw. $\mathcal{O}(E) \rightarrow \mathcal{O}(A)$ surjektiv, d.h. jede holomorphe Funktion $f \in \mathcal{O}(A)$ läßt sich holomorph nach Ω bzw. E fortsetzen.

Beweis:

Nach Satz 6.4 und Theorem 6.1 ist $H^1(\Omega, I_A) = 0$ für eine analytische Hyperfläche $A \subset \Omega$, und die erste Behauptung folgt aus Satz 5.3.

Der abgeschlossene lineare Teilraum $F \subset E$ ist ebenfalls ein DFN -Raum mit Schauder-Basis, und für die $\mathcal{O}_F$ -Modul-Garbe I_A gilt somit $H^1(F, I_A) = 0$, d.h. jede holomorphe Funktion $f \in \mathcal{O}(A)$ läßt sich holomorph nach F und gemäß Boland [4], Corollary 3.1, damit auch nach E fortsetzen. ///

Nun kommen wir zum Beweis des Weierstraßschen Vorbereitungssatzes. Wir gehen dabei vor wie beim Beweis im endlich-dimensionalen Fall, vgl. Andreian Cazacu [1], I § 12, Theorem 2.

6.6 Hilfssatz:

Es sei $a \in E$, E^a ein Komplementärraum zu $\mathbb{Q}a$ und f eine holomorphe Funktion auf einer Nullumgebung, so daß die holomorphe Funktion $t \mapsto f(ta)$ auf keiner Nullumgebung identisch verschwindet. Dann gibt es ein umkehrbares Element $h_0 \in \mathcal{O}_0^*$ und den Keim eines Weierstraß-Polynoms $P_0 \in (\mathcal{O}_{E^a})_0[X]$ mit $f_0 = h_0 \cdot P_0$. Diese Darstellung von f_0 ist eindeutig.

Beweis:

Nach Mazet [29], Théorème V.2, gibt es eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ und zu jedem Keim $g_0 \in \mathcal{O}_0$ genau einen Keim $\tilde{h}_0 \in \mathcal{O}_0$

und den Keim $R_0 \in (O_{E^A})_0[X]$ eines Weierstraß-Polynoms vom Grad $< n$ mit $g_0 = \tilde{h}_0 \cdot f_0 + R_0$. Wenden wir dieses Theorem an auf den Keim der Funktion $g: E^a \oplus \mathbb{C}a \rightarrow \mathbb{C}$, $(x', ta) \mapsto t^n$, so gibt es in einer Nullumgebung genau eine holomorphe Funktion h und ein Weierstraß-Polynom R vom Grad $< n$ mit

$$t^n = \tilde{h}(x'+ta) \cdot f(x'+ta) + \sum_{i=1}^{n-1} a_i(x') t^i.$$

Insbesondere (mit $x'=0$) gilt $\tilde{h}(ta) \cdot f(ta) = t^n - \sum_{i=0}^{n-1} a_i(0) t^i$.

Aus Mazet [29], Théorème V.2, geht weiter hervor, daß n der Grad der Funktion $t \mapsto f(ta)$ im Nullpunkt ist, das heißt, es gibt eine holomorphe Funktion ϕ in einer Umgebung der $0 \in \mathbb{C}$ mit $\phi(0) \neq 0$ und

$$\tilde{h}(ta) t^n \phi(t) = t^n - \sum_{i=1}^{n-1} a_i(0) t^i.$$

Daraus folgt, daß

$$\tilde{h}(ta) \cdot \phi(t) = 1 \text{ und } a_i(0) = 0 \text{ ist für } 0 \leq i \leq n-1.$$

Somit ist

$$\tilde{h}_0 \text{ umkehrbar und } R_0 = 0, \text{ und aus der Eindeutigkeit der}$$

$$\text{Darstellung } g_0 = \tilde{h}_0 f_0 + R_0 \text{ folgt die Eindeutigkeit von}$$

$$f_0 = h_0 \cdot P_0, \text{ wobei } h_0 := \tilde{h}_0^{-1} \text{ und } P_0 \text{ der Keim von}$$

$$g-R: x'+ta \rightarrow t^n - \sum_{i=1}^{n-1} a_i(x') t^i \text{ sei.}$$

///

Zum vollständigen Beweis von Satz 6.4 fehlt uns lediglich noch der Beweis von Lemma 6.7:

6.7 Lemma:

Es sei $U \subset E$ eine Nullumgebung und $f, g \in \mathcal{O}(U)$, so daß f_0 und g_0 relativ-prim sind. Dann gibt es eine Nullumgebung $V \subset U$, so daß f_x und g_x relativ-prim sind für $x \in V$.

Da $\mathcal{O}_x$ für $x \in E$ faktoriell ist (vgl. Mazet [29], Proposition V.9) und wegen der Gültigkeit des Weierstraßschen Vorbereitungssatzes (Hilfssatz 6.6) verläuft der Beweis wortwörtlich wie im endlich-dimensionalen Fall. Man vergleiche etwa Andreian Cazacu [1], I § 19, Theorem 2.

L I T E R A T U R

- [1] ANDREIAN CAZACU, C.: Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlicher. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Ost-Berlin, 1975.
- [2] AVERBUKH, V.I. / SMOLYANOV, O.G.: The Theory of Differentiation in Linear Topological Spaces. Russian Mathematical Surveys 22 (6), 1967, 201-258
- [3] BAUER, H.: Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie. W.de Gruyter, Berlin-New York, 2. Auflage 1974.
- [4] BOLAND, Ph.J.: Holomorphic Functions on Nuclear Spaces. Transactions of the Mathematical Society 209, 1975, 275-281.
- [5] BOURBAKI, N.: Éléments de mathématique. Fascicule XIII, Livre VI: Intégration, Chapitres 1,2,3 et 4, 2^e édition. Hermann, Paris, 1965.
- [6] BOURBAKI, N.: Éléments de mathématique. Fascicule XXI, Livre V: Intégration, Chapitre V, 2^e édition. Hermann, Paris, 1967.
- [7] BOURBAKI, N.: Éléments de mathématique. Fascicule XXXV, Livre VI: Intégration, Chapitre IX. Hermann, Paris, 1969.
- [8] COEURÉ, G.: L'équation $\bar{\partial}u=F$ en dimension infinie. Journées Bruxelles-Lille-Mons d'Analyse et Équations aux Dérivées Partielles, Université de Lille, Publications internes, 131, 1968, 6-9.
- [9] COLOMBEAU, J.F. / PERROT, B.: The $\bar{\partial}$ -Equation in Pseudo Convex Open Subsets of DFN Spaces. Bulletin de la Société mathématique France, 110 (1982), 15 - 26.
- [10] DIEUDONNÉ, J.: Grundzüge der modernen Analysis. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Ost-Berlin, Band 1: 1972, Band 2: 1975.
- [11] DINEEN, S.: Cousin's first problem on certain locally convex topological vector spaces. An. Acad. Bras. Ciênc. 48 (1976), 11-12.

- [12] DINEEN, S.: Complex Analysis in Locally Convex Spaces.
North-Holland Mathematics Studies 57, Amsterdam/
New York/ Oxford 1981.
- [13] DINEEN, S. / NOVERRAZ, Ph. / SCHOTTENLOHER, M.:
Le problème de Levi dans certains espaces vectoriels.
Bulletin de la Société mathématique France,
104 (1976), 87-97.
- [14] ERWE, F.: Differential- und Integralrechnung II.
Bibliographisches Institut Mannheim, 1962.
- [15] FLORET, K. / WLOKA, J.: Einführung in die Theorie der
lokalkonvexen Räume. Springer Lecture Notes 56,
Berlin-Heidelberg-New York, 1968.
- [16] GROTEMEYER, K.P.: Topologie. Bibliographisches Institut,
Mannheim-Wien-Zürich, 1969.
- [17] GUNNING, R.C. / ROSSI, H.: Analytic Functions of
Several complex Variables. Prentice-Hall, Inc.,
Englewood Cliffs, N.J., 1965.
- [18] HENRICH, C.J.: The $\bar{\partial}$ equation with polynomial growth
on a Hilbert space. Duke Mathematical Journal
40 (2), 1973, 279-306.
- [19] HIRZEBRUCH, F. / SCHARLAU, W.: Einführung in die
Funktionalanalysis. Bibliographisches Institut
Mannheim-Wien-Zürich, 1971.
- [20] HÖRMANDER, L.: Linear partial differential operators.
Springer-Verlag Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1963.
- [21] HÖRMANDER, L.: An Introduction to Complex Analysis in
Several Variables. D. van Nostrand Company, Inc.
Princeton, N.J., 1966.
- [22] HORVATH, J.: Topological vector spaces and distributions,
Vol. 1. Addison-Wesley Publishing Company, Reading,
Mass. - Palo Alto - London - Don Mills, Ont., 1966.
- [23] KELLEY, J.L.: General Topology. Van Nostrand Reinhold
Company New York, 1955.
- [24] KERNER, H.: Komplexe Räume; Komplexe Analysis.
Vorlesungen an der Universität München 1969/1970.
Korrigierter Nachdruck 1974.

- [25] KNOPP, K.: Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen. Springer-Verlag Berlin-Göttingen-Heidelberg-New York, 5. ber. Auflage, 1964.
- [26] KÖTHE, G.: Topological Vector Spaces I. Springer-Verlag Berlin-Heidelberg-New York, 1969.
- [27] KULTZE, R.: Garbentheorie. Teubner Stuttgart, 1970.
- [28] LLOYD, J.: Smooth Partitions of Unity on Manifolds. Transactions of the Mathematical Society 187 (1974), 249-259.
- [29] MAZET, P.: Ensembles analytiques complexes dans les espaces localement convexes. Thèse, Paris, 1979.
- [30] MAZET, P.: Un theoreme d-Hypoéllipticité pour l-opérateur $\bar{\partial}$ sur les espaces de Banach. Comptes Rendus des Séances de l'Academie des Sciences 292 (1981), 31-33.
- [31] NOVERRAZ, Ph.: Pseudo-Convexité, Convexité Polynomiale et Domaines d'Holomorphie en Dimension Infinie. North Holland Publishing Company, Amsterdam - London, 1973.
- [32] PESCHL, E.: Funktionentheorie Band 1. Bibliographisches Institut Mannheim, 1967.
- [33] PIETSCH, A.: Nuclear Locally Convex Spaces. Springer Verlag Berlin-Heidelberg-New York, 1972.
- [34] PONTRJAGIN, L.S.: Topologische Gruppen, Teil 1. B.G.Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1957.
- [35] RABOIN, P.: Résolution de l'équation $\bar{\partial}f = F$ sur un espace de Hilbert. Séminaire Pierre Lelong (Analyse) Année 1975/1976. Springer Lecture Notes 578 (1977), 269-279.
- [36] RABOIN, P.: Le problème du $\bar{\partial}$ sur un espace de Hilbert. Bulletin de la Société mathématique France 107 (1979), 225-240.
- [37] RAMIS, J.P.: Sous-ensembles analytiques d'une variété banachique complexe. Springer-Verlag Berlin-Heidelberg-New York, 1970.
- [38] REIFFEN, H.J. / SCHEJA, G. / VETTER, U.: Algebra. Bibliographisches Institut Mannheim-Wien-Zürich, 1969.

- [39] ROELCKE, W.: Topologische Vektorräume 1. Vorlesungsausarbeitung. Mathematisches Institut der Universität München, 1976.
- [40] SCHAEFER, W.H.: Topological Vector Spaces. 3rd Printing. Springer-Verlag New York-Heidelberg-Berlin, 1971.
- [41] SCHOTTENLOHER, M.: ε -Product and Continuation of Analytic Mappings; in Analyse fonctionnelle et applications (Herausgeber L. Nachbin). Hermann Paris, 1975, Seite 261-270.
- [42] SCHOTTENLOHER, M.: The Levi Problem for Domains Spread Over Locally Convex Spaces With a Finite Dimensional Schauder Decomposition. Annales de l'Institut Fourier de l'Université de Grenoble, Tome XXVI, Fasc. 4, 1976, 207-237.
- [43] SCHOTTENLOHER, M.: Embedding of Stein Spaces into Sequence Spaces. Manuscripta mathematica 39 (1982), 15-29.
- [44] SCHOTTENLOHER, M.: Cartan-Thullen theorem for domains spread over DFM -spaces. Journal für die reine und angewandte Mathematik 345 (1983), 201-220.
- [45] SCHUBERT, H.: Topologie. Teubner Verlagsgesellschaft Stuttgart, 1964.
- [46] SCHWARTZ, L.: Théorie des distributions. Hermann Paris, 1966.
- [47] SAKSCHOD, A.V.: Integration in Hilbert Space. Springer-Verlag Berlin-Heidelberg-New York, 1974.
- [48] VOST, D.: Subspaces and Quotient Spaces of (s) ; in Functional Analysis: Surveys and Recent Results (Herausgeber W.D. Bierstedt/B. Fuchssteiner). North Holland Mathematics Studies Amsterdam-New York-Oxford, 1977, Seite 167-187.
- [49] VAN DER WAERDEN, B.L.: Algebra erster Teil. Springer Verlag Berlin-Heidelberg-New York, 1966.

LEBENS LAUF

geboren	3.1.1951	in Jena
Eltern		Friedrich und Ursula Noßke
Heirat	16.8.1977	mit Regine Noßke, geb. Wagner-Döbler
Volksschule	1957-1961	in Jena und Bonn
Gymnasium	1961-1965	Ernst-Moritz-Arndt-Gymnasium Bonn
	1965-1970	Gymnasium Grafing; Abitur
Zivildienst	1970-1972	in München
Studium	1972-1977	Mathematik mit Nebenfach Angewandte Statistik an der Ludwig-Maximilians- Universität München; Abschluß mit Diplom
Beruf	1979-1982	wissenschaftliche Hilfskraft an der Ludwig-Maximilians-Universität München
	seit 1982	wissenschaftlicher Angestellter beim Institut für Strahlenhygiene des Bundesgesundheitsamtes in Neuherberg

